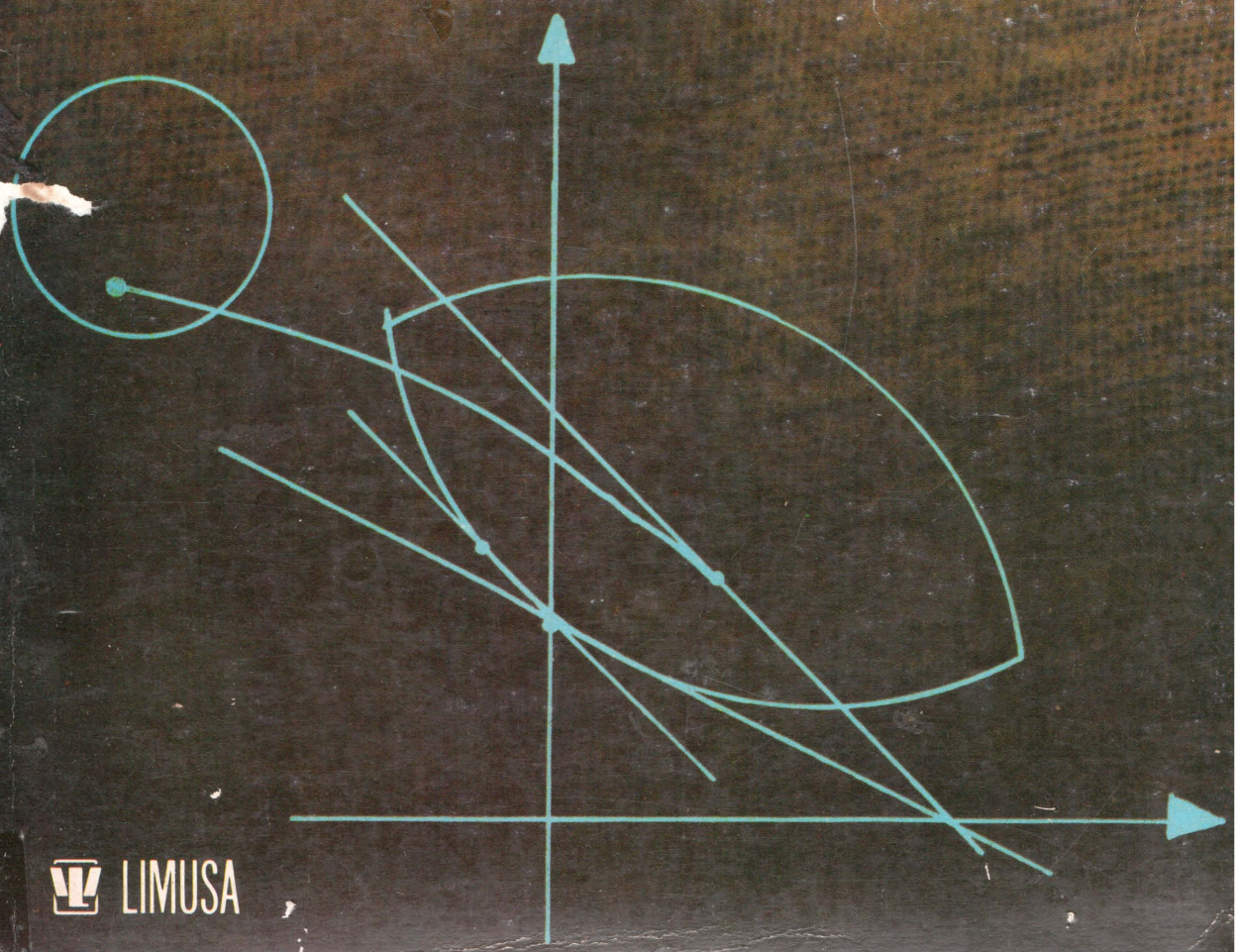
Fundamentos de TEORÍA DE OPTIMIZACIÓN

Javier Màrquez Diez-Canedo



LIMUSA

Temas que trata la obra:

- Conceptos matemáticos básicos y notación
- Conjuntos convexos
- Funciones convexas
- Generalización de funciones convexas
- Optimización lagrangeana

Fundamentos de —TEORÍA DE— OPTIMIZACIÓN

Javier Márquez Diez-Canedo

EDITORIAL LIMUSA

MÉXICO • ESPAÑA • VENEZUELA • ARGENTINA
COLOMBIA • PUERTO RICO

Elaboración: SISTEMAS EDITORIALES TÉCNICOS, S.A. de C.V.

La presentación y disposición en conjunto de
FUNDAMENTOS DE TEORÍA DE OPTIMIZACIÓN
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra puede ser reproducida o transmitida, mediante ningún sistema o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado, la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento de información), sin consentimiento por escrito del editor.

Derechos reservados:

© 1987, EDITORIAL LIMUSA, S. A. de C. V.
Balderas 95, Primer piso, 06040 México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Registro No. 121

Primera edición: 1987
Impreso en México
(6099)

ISBN 968-18-1991-8

A
Javier
y Joaquín
Márquez Blasco:
Dos vidas ejemplares

Prólogo

Hay infinidad de situaciones en la vida real que idealmente requieren optimizar "algo". Es el caso, por ejemplo, de un padre de familia que desea utilizar su sueldo de la mejor forma posible para que él, su esposa y sus hijos reciban la mejor educación, alimentación, vestimenta, etc., que permita el presupuesto familiar. Quizás haya casos en los que decidir el mejor camino para lograr un objetivo no es un problema difícil, pero no cabe duda que hay otros en los que el problema es tremendamente complicado, por la cantidad de factores que se deben tomar en cuenta para llegar a una decisión racional, ya no se diga óptima.

A fines de la década de los años 40 y a principios de los 50 se hicieron varios descubrimientos que abrieron las puertas a la aplicación de la metodología científica a una clase de problemas que hasta entonces tenían que ser atendidos en forma intuitiva y casi artesanal. Así, salvo algunos problemas muy simples y matemáticamente bien comportados, la herramienta técnica disponible para resolver problemas de optimización fue, hasta hace poco, muy limitada. Desde luego, había "en el aire" indicios de que algo se estaba gestando y en ciertos casos, debido a una lamentable miopía en cuanto a sus implicaciones científicas y tecnológicas, resultados muy importantes en materia de optimización matemática pasaron prácticamente desapercibidos. Tal es el caso del trabajo de Kantorovich[20] y Karush,[22] que habiéndose realizado e incluso publicado en 1939, durmió el sueño de los justos sólo para ser desenterrado cuando el trabajo había perdido el impacto que realmente merecía. Otro caso es el de Fritz John[19] que en parte corrió con la misma suerte.

En el caso de Kantorovich quizás se debió a que el trabajo original está en ruso y no se conoció en Occidente hasta finales de los años cincuenta, apareciendo una traducción al inglés en 1960.[21] El trabajo se intitula *"Métodos Matemáticos para Organizar y Planear la Producción"* y su importancia, según Koopmans[25], estriba en "la presencia simultánea de varias ideas o elementos, algunos de los cuales estaban presentes en escritos anteriores en distintas ramas de la economía o las matemáticas", a saber:

1) Un modelo de producción en términos de un número finito de procesos, cada uno caracterizado por relaciones constantes entre sus insumos y sus productos.
2) La percepción de una amplia gama de *aplicaciones prácticas* del modelo a industrias que son a su vez fuentes de información para estas aplicaciones.
3) La prueba de que a cualquier solución óptima del problema es posible asociar lo que se conoce como "precios sombra"; uno a cada recurso, producto intermedio o producto final.

Este último punto recibió un impulso formidable con el trabajo de Von Neumann y Morgenstern sobre "dualidad".[45]

Sin embargo, el despegue definitivo del empleo de métodos matemáticos aplicados a problemas de optimización ocurrió en 1947 cuando George Dantzig desarrolló el "método simplex" para resolver problemas de optimización que sólo involucran relaciones "lineales". Estos problemas se han llamado "*Programas Lineales*" y, a partir del trabajo de Dantzig, con ellos se ha producido un impresionante número de contribuciones teóricas y una proliferación de aplicaciones aún más importante.

Sin duda alguna, el éxito de la *programación lineal* se debe en gran parte al desarrollo acelerado del computador digital. Este avance tecnológico permite la solución de programas lineales capaces de modelar con cierta exactitud miles de interrelaciones que aparecen en sistemas complejos reales. De ahí la utilidad de la programación lineal, al grado de que Kantorovich y Koopmans recibieron el Premio Nobel de 1975 y Dantzig el de la Academia Nacional de Ciencias de su país, por su trabajo pionero sobre programación lineal.

El caso del trabajo de Karush, y posteriormente el de Fritz John, es menos explicable que el de Kantorovich y sólo puede atribuirse a la ignorancia respecto a las implicaciones teóricas y prácticas que tenían sus resultados, aparte de la forma en que fueron publicados, a saber: el de Karush fue una ¿tesis de maestría!? y el artículo de Fritz John fue prácticamente un regalo de cumpleaños a Courant! Así, no fue hasta el año de 1951 en que Kuhn y Tucker publicaron y difundieron su trabajo en el cual habían obtenido independientemente resultados semejantes a los de Karush y Fritz John, que su importancia fue reconocida. Inicialmente se vio como fundamental para el desarrollo de métodos numéricos para resolver problemas de optimización no-lineales, y posteriormente como un resultado de gran importancia teórica tanto en matemáticas como en otras disciplinas (véase por ejemplo, Intriligator[18] y Márquez.[32])

La experiencia en aplicaciones acumulada a la fecha es ya considerable. Desde una vasta gama de aplicaciones ingenieriles, como lanzamiento de satélites, diseño de estructuras en ingeniería civil, diseño de partes mecánicas y circuitos eléctricos, hasta aplicaciones económicas y de gestión administrativa como el control de la producción, inventarios, asignación óptima de recursos, planeación agrícola y estrategias de inversión óptima. En el campo teórico destacan las aplicaciones a la teoría económica, por ejemplo en la teoría de precios, la teoría del bienestar y la teoría moderna de finanzas.

En la actualidad casi no se concibe una empresa grande que no utilice técnicas de optimización en cuando menos un aspecto de su proceso productivo, operativo o financiero. También las dependencias gubernamentales de los países con cierto nivel de desarrollo las utilizan para algunos problemas operativos, pero su uso más importante en el gobierno es para la planeación.

Sobre el libro:

Una aclaración pertinente es que las *pretensiones de originalidad son nulas.* La idea de hacer este libro surgió de la urgente necesidad que existe (a juicio de este autor) de contar con literatura científica en español en este campo de las matemáticas. Así, el material aquí presentado es básicamente el que mejor respuesta ha encontrado entre mis alumnos a través de los años; es decir, he tomado de la literatura existente el material que de cada tema parece ser más fácilmente comprendido por aquellos que se enfrentan por primera vez con la teoría de optimización. También he compensado algunos aspectos que considero deficientes en la literatura actual. No pido excusas; esto me ha parecido un esfuerzo mejor orientado que la simple traducción de alguno de los textos ya existentes, por buenos que éstos puedan ser.

Desde luego no he resistido la tentación del "toque personal" que, independientemente del estilo mismo en que está escrito el libro, se manifiesta principalmente en los ejemplos escogidos. Aparte de algunos que ya se consideran clásicos en la literatura, éstos han sido preparados especialmente para este libro. Muchos de los ejercicios que se incluyen al final de cada capítulo son originales, y también he incorporado algunos resultados recientes que no han sido publicados antes en un libro de texto, por lo menos en los más conocidos. Este material aparece disperso en el texto y también en los ejercicios, cuando se trata de una continuación natural del material presentado en el capítulo respectivo.

La siguiente aclaración pertinente es que este libro es de teoría. Salvo la breve alusión antes hecha, no he tratado ni las aplicaciones ni el tema de métodos numéricos o algoritmos. Esto puede parecer extraño para ser un libro escrito por alguien que se ha pasado toda su vida profesional en el campo de la práctica, pero obedece a razones muy precisas. En primer término, estoy firmemente convencido de que "la práctica se aprende en la práctica" y de que los libros de texto sobre aplicaciones tienen poco valor sin una buena comprensión de la teoría. Esto se debe a que es difícil que el mismo problema se reproduzca exactamente en distintos lugares o épocas; siempre hay diferencias que los distinguen y obligan a ciertos ajustes técnicos que serían difíciles de realizar sin una buena comprensión de la teoría subyacente. En el caso de una nueva aplicación la afirmación es contundente. Esto, lejos de manifestar desprecio hacia la práctica, debe interpretarse como un profundo respeto. El escepticismo se refiere a la enseñanza académica de la práctica, que a mi juicio tiene un cierto sentido contradictorio,

pero jamás he dudado de la necesidad o voluntad de contribuir en la solución de problemas cotidianos.

En el aspecto algorítmico, mi opinión personal es de que la tentación es demasiado grande de aplicarlos en forma indiscriminada e incluso innecesaria. En dieciséis años de experiencia profesional he tratado varios casos prácticos de problemas de optimización solubles por la aplicación directa de la teoría, sin necesidad de entrar a un proceso algorítmico complicado. En muchos casos un buen conocimiento teórico conduce a esquemas de modelación y solución más adecuados al problema en cuestión. Esto implica ahorros importantes de esfuerzo y desde luego el "desgaste emocional" que puede resultar de una interacción tortuosa con un computador. Cualquier profesional con algo de experiencia práctica sabe exactamente a qué me refiero. El uso correcto de un algoritmo requiere de una buena comprensión teórica tanto del problema que se quiere resolver, como del algoritmo que se utilice para resolverlo. En cualquier caso, un buen tratamiento del tema requiere de un esfuerzo substancial que prefiero dejar para otra ocasión.

A la luz de lo anterior, este libro trata básicamente de la caracterización de puntos óptimos. En el primer capítulo he puesto, para fines de repaso principalmente, los conceptos de análisis matemático que estimo necesarios para entrar al texto. Así, cada lector podrá detenerse solamente en aquellos conceptos que le interesan, pasando por encima aquellos que ya le sean familiares. Esto presupone conocimientos de análisis, digamos al nivel de Rudin[41], y álgebra lineal (al nivel de Murdock).[35] Aunque el libro no lo requiere, ciertos conocimientos de programación lineal resultarán sin duda provechosos.

Los tres capítulos siguientes son de hecho una brevísima introducción al análisis convexo, ya que las caracterizaciones de puntos óptimos dependen en forma importante de las propiedades de convexidad de los conjuntos y funciones sobre los que está planteado el problema de optimización. Así, el capítulo segundo trata de conjuntos convexos y los capítulos tercero y cuarto de funciones convexas y sus generalizaciones. En estos capítulos se cimienta la teoría de optimización propiamente dicha, ya que en ellos se derivan algunos de los resultados básicos de la optimización clásica, las caracterizaciones geométricas y la herramienta matemática que se requiere para transformar estas condiciones geométricas en caracterizaciones del tipo Lagrangeano.

La teoría de optimización propiamente dicha aparece en los dos últimos capítulos. Así, el capítulo quinto trata de optimización clásica y sus derivaciones modernas, a saber: los teoremas de Fritz John y de Karush, Kuhn y Tucker. En éstos se hace patente la importancia de la convexidad en la caracterización de puntos óptimos, sobre todo en la obtención de condiciones de suficiencia.

El último capítulo trata el importantísimo tema de dualidad y optimalidad de puntos de silla. El enfoque seguido es básicamente el Lagrangeano, por sus implicaciones algorítmicas y por la importancia cada vez mayor de este tema para la teoría económica.

El contenido del texto puede cubrirse a nivel de estudiantes graduados en un semestre y en un 70% a nivel de licenciatura. En caso de no querer cubrir todo el texto, se recomienda pasar por encima del capítulo cuatro sobre generalizaciones de funciones convexas. También se pueden hacer sacrificios en la primera parte del capítulo cinco, cuyo interés es más bien histórico, y finalmente se puede prescindir de algunos resultados de dualidad conversa. Sin embargo, es posible que se quiera hacer énfasis en alguno de estos aspectos y cada quien tendrá que escoger el material que vaya a sacrificar.

Por último, al final de cada capítulo se han incluido alrededor de veinte ejercicios que permitirán consolidar los conceptos estudiados y profundizar en ellos. Sobra decir que se considera altamente recomendable hacerlos todos, aunque reconozco que algunos son de alta complejidad técnica y requerirán de un gran esfuerzo para resolverlos. En general, el hacer las dos terceras partes de los ejercicios conducirá a un buen aprovechamiento del texto.

En materia de agradecimientos necesito dar muchos. En primer lugar a Irma Esquivel que a través de los años pacientemente ha mecanografiado múltiples y variadas versiones del material contenido en el texto. Quiero agradecer también a mis alumnos que han contribuido en forma substancial para que el material aquí expuesto tenga alguna estructura coherente, y espero que sus inquietudes hayan redundado en una presentación entendible del material seleccionado. Aunque todos se lo merecen, quiero agradecer especialmente a los que destacaron por su lucidez, curiosidad intelectual y dedicación: Gonzalo Castañeda, Rafael Cristerna, Alfredo Font, Carla Inclán, Carlos Silva, Patricia Souza y Cosme Urdaibay, entre otros.

Por último, un especial agradecimiento a David Margolín y Francisco Solís, que revisaron la versión final del texto, este último contribuyendo de forma importante a una mejor estructuración y con demostraciones más elegantes de algunos de los teoremas escogidos. Los errores conceptuales que hayan quedado son de mi exclusiva responsabilidad y sin duda contemplaré con horror algunos cuando reciba la primera copia del libro impreso.

Javier Márquez Diez-Canedo

Contenido

Prólogo 7

1 Conceptos matemáticos básicos y notación 17

INTRODUCCION 17
1.1 NOTACION BASICA 17
1.2 OPERACIONES CON VECTORES 18
1.3 LA NORMA DE UN VECTOR Y LA DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ 20
1.4 CONCEPTOS TOPOLOGICOS: DISTANCIA, VECINDAD, CONJUNTOS ABIERTOS, CERRADOS Y COMPACTOS 21
1.5 SUCESIONES DE PUNTOS 22
1.6 FUNCIONES CONTINUAS Y FUNCIONES DIFERENCIABLES 24
1.7 LA EXPANSION DE TAYLOR EN E^n 28
1.8 EL CONCEPTO DE MAXIMA COTA INFERIOR O INFIMO 28
1.9 EL TEOREMA DE LA FUNCION IMPLICITA 29

2 Conjuntos convexos 31

INTRODUCCION 31
2.1 CONJUNTOS CONVEXOS 31
2.2 EL CASCO CONVEXO DE UN CONJUNTO 33
2.3 ALGUNAS PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE CONJUNTOS CONVEXOS 36
2.4 SEPARACION Y SOPORTE DE CONJUNTOS CONVEXOS Y TEOREMAS DE ALTERNATIVAS 39
2.4.1 La distancia mínima de un punto a un conjunto convexo 39
2.4.2 Hiperplanos y separación de conjuntos convexos 42
2.4.3 Separación de un conjunto convexo y un punto, y los teoremas de Farkas, Motzkin y Gale 47
2.4.4 Soporte de conjuntos convexos en puntos frontera 54
2.4.5 Separación de dos conjuntos convexos y el teorema de Gordan 55
2.5 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES 57
EJERCICIOS CAPITULO 2 58

3 Funciones convexas *63*

INTRODUCCION 63
3.1 FUNCIONES CONVEXAS: DEFINICION Y PROPIEDADES BASICAS 64
3.2 EL EPIGRAFO Y EL HIPOGRAFO DE UNA FUNCION CONVEXA 67
3.3 LA DERIVADA DIRECCIONAL DE UNA FUNCION Y EL SUBGRADIENTE 72
3.4 FUNCIONES CONVEXAS DIFERENCIABLES 76
3.5 MAXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCION CONVEXA 82
3.5.1 Mínimos de una función convexa 31
3.5.2 Maximización de funciones convexas 87
3.6 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES 94
EJERCICIOS CAPITULO 3 95

4 Generalización de funciones convexas *101*

INTRODUCCION 101
4.1 FUNCIONES CUASI-CONVEXAS 101
4.1.1 Definición y nociones básicas 101
4.1.2 Funciones estrictamente cuasi-convexas 104
4.1.3 Funciones fuertemente cuasi-convexas 106
4.1.4 Funciones cuasi-convexas diferenciables 108
4.2 FUNCIONES PSEUDO-CONVEXAS 112
4.3 RELACIONES ENTRE FUNCIONES PSEUDO-CONVEXAS Y FUNCIONES CUASI-CONVEXAS, Y CARACTERIZACIONES ADICIONALES 113
4.4 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES 118
EJERCICIOS CAPITULO 4 118

5 Optimización lagrangeana *125*

5.1 OPTIMIZACION CLASICA 125
5.1.1 Problemas irrestrictos 126
5.1.2 Problemas restringidos por igualdades 128
5.2 CONDICIONES NECESARIAS DE OPTIMALIDAD PARA PROBLEMAS CON RESTRICCIONES ESPECIFICADAS POR DESIGUALDADES 130
5.2.1 El concepto de una dirección factible 131
5.2.2 Condiciones geométricas 131
5.2.3 Las condiciones de Fritz - John 134
5.2.4 Las condiciones de Karush, Kuhn y Tucker 136
5.3 CONDICIONES NECESARIAS DE OPTIMALIDAD PARA PROBLEMAS CON RESTRICCIONES ESPECIFICADAS POR IGUALDADES Y DESIGUALDADES 144
5.4 SUFICIENCIA 146
5.5 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES 147
EJERCICIOS CAPITULO 5 148

6 Dualidad y optimalidad de puntos de silla *157*

6.1 EL DUAL DEL PROBLEMA DE PROGRAMACION NO-LINEAL 157
6.2 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL PROBLEMA DUAL 158
6.3 UNA INTERPRETACION ECONOMICA DEL LAGRANGEANO Y DEL PROBLEMA DUAL. 164
6.4 PUNTOS DE SILLA 165
6.5 PUNTOS DE SILLA DEL LAGRANGEANO Y DUALIDAD 168
6.6 EL RESULTADO DEBIL DE DUALIDAD. 169
6.7 FUNCIONES CONVEXAS DIFERENCIABLES 170
6.8 LA BRECHA DE DUALIDAD Y LOS TEOREMAS DE INEXISTENCIA DE LA BRECHA Y DE DUALIDAD CONVERSA. 171
6.9 INEXISTENCIA Y NO-ACOTAMIENTO 181
6.10 CONDICIONES DE OPTIMALIDAD DE PUNTO DE SILLA. 184
6.11 LA RELACION ENTRE LAS DISTINTAS CONDICIONES DE OPTIMALIDAD 188
6.12 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES. 190
EJERCICIOS CAPITULO 6. 191
BIBLIOGRAFIA. 197
INDICE. 201

1 *Conceptos matemáticos básicos y notación*

INTRODUCCION

En este capítulo se revisan algunos conceptos de análisis matemático, que se utilizan con frecuencia en el texto. Este breve repaso servirá además para familiarizar al lector con la notación que se usará a lo largo del libro. El lector que esté familiarizado con estos conceptos podrá pasar rápidamente por este capítulo.

1.1 NOTACION BASICA

Aunque la notación que se utiliza en este texto es bastante común, se hará una revisión para evitar posibles confusiones futuras. Así, el conjunto de los *números reales* o *Espacio Euclideano de una dimensión* se denotará por $\mathcal{R}$ ó E^1. El símbolo "$\in$" es el de "pertenencia" de modo que "$x \in C$" se debe leer como "x que pertenece al conjunto C" o "x elemento de C", etc. Análogamente, "$\subset$" es el símbolo que representa "contención", de modo que por "$S \subset E^n$" se entiende que "S es un subconjunto del espacio Euclideano n-dimensional E^n" o bien, que "S está contenido en E^n". Los símbolos "$\cup$" y "$\cap$" denotan "*unión*" e "*intersección*" de conjuntos, respectivamente.

Hay varias maneras de especificar conjuntos pero aquí, en general, se especifican utilizando llaves del tipo "{ }", de modo que por:

$$\Omega = \{x \mid x \geqslant 0; x \in \mathcal{R}\}$$

se entiende que "Ω es el conjunto de todas las equis, tales que x es un elemento de los números reales no-negativos", etc.

Obviamente, también se pueden tener conjuntos finitos o contables. Así por ejemplo, $\{0, 1\}$ es el conjunto cuyos elementos son cero y uno, y por $x \in \{0, 1\}$ se entiende que equis es cero o uno. Análogamente,

$$\mathcal{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

es el conjunto de todos los números enteros no-negativos, etc.

Finalmente, los intervalos sobre la "línea real" se denotan con paréntesis cuadrados [,] si son cerrados, con paréntesis curvos (,) si son abiertos, y alguna mezcla, si el intervalo es cerrado de un lado y abierto del otro. Así, el intervalo $[\alpha, \beta] \subset \mathcal{R}$ $\alpha \leqslant \beta$ es el conjunto de todos los números reales que están entre "α" y "β"; es decir,

$$[\alpha, \beta] \equiv \{x \in \mathcal{R} \mid \alpha \leqslant x \leqslant \beta\}$$

Análogamente:

$$(\alpha, \beta) \equiv \{x \in \mathcal{R} \mid \alpha < x < \beta\}$$
$$[\alpha, \beta) \equiv \{x \in \mathcal{R} \mid \alpha \leqslant x < \beta\}$$
$$(\alpha, \beta] = \{x \in \mathcal{R} \mid \alpha < x \leqslant \beta\}$$

Finalmente, se tienen los símbolos de implicación "$\Rightarrow$", "$\Leftarrow$" y "$\Longleftrightarrow$", de modo que por "$A \Rightarrow B$" se entiende que la afirmación A *implica* la afirmación B o "B *si* A". Análogamente, "A *si* B" se puede escribir según "$A \Leftarrow B$". Finalmente, por "$A \Longleftrightarrow B$" se entiende que la afirmación A se cumple *si y sólo si* se cumple la afirmación B. Ocasionalmente se utilizan en el texto el símbolo "$\exists$" de *existencia* y el símbolo "$\forall$" que significa "para toda".

1.2 OPERACIONES CON VECTORES

Aquí se tratará básicamente la teoría de optimización en espacio Euclideano E^n, cuyos elementos son vectores con "n" componentes reales. Es decir:

$$v \in E^n \Rightarrow v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Donde $v_i \in \mathcal{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$

Para los propósitos de este texto, todos los vectores serán vectores "columna". Así, salvo que se indique lo contrario, un vector "fila" siempre será denotado como el "transpuesto" de un vector columna; es decir:

$$v^T = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

Dos vectores $u, v \in E^n$ se pueden sumar o restar, lo cual equivale a realizar la operación siguiente:

$$\begin{aligned} w = u + v &\Rightarrow w_i = u_i + v_i \\ x = u - v &\Rightarrow x_i = u_i - v_i \end{aligned} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Es decir, el vector resultante tendría como componentes la suma o resta de las componentes de los vectores sumados o restados.

Hay varias operaciones de multiplicación que deben ser consideradas. En primer término, se menciona la *multiplicación escalar* de un vector $v \in E^n$ por un número $\alpha \in \mathcal{R}$, que equivale a realizar la siguiente operación:

$$u = \alpha v \Rightarrow u_i = \alpha v_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Es decir, el vector resultante tiene como componentes a las componentes de v, multiplicadas por la escalar α.

El *producto interno* de dos vectores $u, v \in E^n$ se denota según $u^T v$ y equivale a realizar la operación siguiente:

$$u^T v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \in \mathcal{R}$$

Finalmente, el *producto externo* de dos vectores $u \in E^n$; $v \in E^m$ resulta en una *matriz* M o M^T según:

a) $u v^T = M$ ("n" filas y "m" columnas)
b) $v u^T = M^T$ ("m" filas y "n" columnas)

donde los elementos "m_{ij}" de la matriz M vienen dados por:

$$m_{ij} = u_i v_j \qquad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

Análogamente, los elementos m'_{ij} de M^T vienen dados por:

$$m'_{ij} = v_i\, u_j \quad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

Nótese que M^T es la *transpuesta* de la matriz M, ya que las filas de una son las columnas de la otra, y viceversa.

Hay algunos vectores que se utilizan con cierta frecuencia y que merecen una notación especial. Tal es el caso del *vector unitario* "e_i" cuyas componentes son "cero" excepto la i-ésima que es la unidad; es decir:

$$e_2 \in E^3 \Rightarrow e_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Una propiedad importante de este vector es que permite "aislar" componentes de otro vector $v \in E^n$, ya que $e_i^T v = v^T e_i = v_i$.

Otro vector que se utiliza con regular frecuencia en el texto, es el *vector suma* "**1**" cuyos "n" elementos son la unidad; es decir:

$$\mathbf{1} \in E^n \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

La razón de su nombre es que el tomar el "producto interno" de **1** con cualquier vector $v \in E^n$, equivale a la operación de sumar todas las componentes del vector; es decir;

$$\mathbf{1}^T v = v^T \mathbf{1} = \sum_{i=1}^{n} v_i$$

1.3 LA NORMA DE UN VECTOR Y LA DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

La *norma* de un vector es una medida de su tamaño. La norma Euclideana de un vector $v \in E^n$, se denota según $\|v\|$ y se obtiene a través de la operación siguiente:

$$\|v\| = \sqrt{v^T v}$$

De estas definiciones, es fácil comprobar la *ley del paralelogramo*, que dice lo siguiente:

Dados $u, v \in E^n$, se satisfacen las relaciones siguientes:

i) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\,u^T v$
ii) $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\,u^T v$
iii) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\,(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

También debe recordarse la desigualdad del triángulo que dice que $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Se termina este punto, recordando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, que se usa con mucha frecuencia a lo largo del texto, a saber:

$$|u^T v| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$$

1.4 CONCEPTOS TOPOLOGICOS: DISTANCIA, VECINDAD, CONJUNTOS ABIERTOS, CERRADOS Y COMPACTOS

El concepto de vecindad es un concepto de cercanía entre puntos de un espacio. Es decir, cuando se dice que "y" está en una vecindad de "x" se está diciendo que, de alguna manera, "y" está "cerca de x". En E^n para hablar de cercanía es necesario hablar de distancia y, en este texto, como siempre se trabaja en espacio euclideano E^n, se usa la *métrica* o *función de distancia euclideana*

Definición: Sean "x, y" $\in E^n$ entonces, la *distancia* entre "x" e "y" es:

$$D(x, y) = \|x-y\| = \sqrt{(x-y)^T (x-y)}$$

Definición: Dado $x \in E^n$ y $\epsilon > 0$, al conjunto

$$B(x, \epsilon) = \{y \in E^n \mid \|x-y\| < \epsilon\}$$

se le llama una *bola abierta* con centro en "x" y de radio ϵ. $B(x, \epsilon)$ también es conocida como una vecindad esférica de "x" con radio ϵ.

En general, una *vecindad* de "x" es cualquier conjunto V para el cual existe $\epsilon > 0$, tal que $B(x, \epsilon) \subset V$. Sin embargo, cuando se trabaja con vecindades, lo que se hace es que la misma bola abierta se usa como vecindad ya que obviamente $B(x, \epsilon)$ califica como tal. Por ejemplo, para $\epsilon' = \epsilon/2 > 0$ $B(x, \epsilon') \subset B(x, \epsilon)$.

Definición: Se dice que un conjunto S es un conjunto *abierto* si $\forall\, x \in S$, existe $\epsilon(x) > 0$, tal que $B(x, \epsilon(x)) \subset S$.

Definición: El conjunto S es un conjunto *cerrado* si su *complemento* $\overline{S}$ es un conjunto abierto.

Definición: Sea $S \subset E^n$. Se dice que $C(S)$ es *la cerradura o el conjunto cerrado más pequeño* que contiene a S, si $C(S)$ es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a S. La cerradura de S se denota por $\tilde{S}$.

Definición: Se dice que un conjunto S está *acotado*, si $\exists\ M \in \mathcal{R}$ tal que $||x|| \leqslant M$; $\forall\ x \in S$.

Se termina esta sección recordando el concepto de *compacidad de conjuntos*. Este concepto es sumamente importante en análisis, y tiene implicaciones importantes en la teoría de optimización.

Definición: Se dice que los conjuntos A^i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ forman una *cobertura abierta* para un conjunto S, si cada conjunto A^i es abierto $\forall\ i$, y

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A^i.$$

Definición: Dada una cobertura abierta A^i; $i = 1, 2, 3, \ldots$ para S, se dice que los conjuntos A^i, $i \in K$ forman una *subcobertura finita* para S, si el conjunto $K \subset \{1, 2, 3, \ldots\}$ es finito, y $S \subset \bigcup_{i \in K} A^i$.

Definición: Se dice que un conjunto S es *compacto*, si de cualquier cobertura abierta para S se puede formar una subcobertura finita para S. Es decir, si para cualquier cobertura abierta $\{A^i\}$, $\exists\ K$ finito tal que $S \subset \bigcup_{i \in K} A^i$.

Se sabe que una condición necesaria para que un conjunto sea compacto es que el conjunto sea cerrado y acotado. En espacio euclideano, la condición es además, suficiente.

1.5 SUCESIONES DE PUNTOS

Una sucesión de puntos es una función definida sobre el conjunto nonegativo de números enteros: $\mathcal{Z}^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Así, si $f(k) = x^k$ para $k \in \mathcal{Z}^+$, lo usual es denotar a una sucesión infinita de puntos, según:

$$\{x^k\} = \{x^k\}_{k=0}^{\infty} = \{x^0, x^1, x^2 \ldots\}$$

donde los *elementos* de la sucesión son precisamente los puntos x^k.

En este texto se usará también el concepto de *subsucesión* que es un subconjunto del conjunto formado por los elementos de una sucesión. Las subsucesiones serán denotadas de la manera siguiente:

$$\{x^k\}_K ; K \subset \mathcal{Z}^+$$

Por lo anterior, $\{x^k\}_K \subset \{x^k\}$.

A continuación se recuerda el concepto de convergencia de sucesiones, el de sucesiones de Cauchy y algunas propiedades.

Definición: Se dice que una sucesión de puntos $\{x^k\}_K$ donde $x^k \in E^n$ $\forall\, k \in K$; $K \subset \{1, 2, \ldots\}$ *converge a un límite* $\bar{x} \in E^n$, denotado $x^k \to \bar{x}$, si dado $\epsilon > 0$ existe $k(\epsilon)$ tal que

$$||x^k - \bar{x}|| < \epsilon \quad \forall\, k \geqslant k(\epsilon);\ k \in K$$

La propiedad de Cauchy

Definición: Una sucesión $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ tiene la propiedad de "Cauchy" si dado $\epsilon > 0$ $\exists\ \bar{k}$ tal que

$$||x^k - x^m|| < \epsilon \qquad \forall\, k, m > \bar{k}$$

En un "espacio normado completo", toda sucesión convergente tiene la propiedad de Cauchy, y toda sucesión con dicha propiedad es convergente.[29]

Lema 1.1 Cualquier sucesión que tenga la propiedad de Cauchy está acotada.

Prueba: Se requiere demostrar que $\exists\ M \in \mathfrak{R}$ tal que:

$$||x^k|| < M \quad \forall\, k$$

Sea $\epsilon = 1$. Entonces, como la sucesión tiene la propiedad de Cauchy $\exists\ \bar{k}$ tal que

$$||x^k - x^m|| < 1 \quad \forall\, k, m \geqslant \bar{k}$$

Ahora, sea $m \geqslant \bar{k}$; y examínese la relación siguiente:

$$||x^k|| = ||x^k - x^m + x^m|| \leqslant ||x^m|| + ||x^k - x^m|| \quad \forall\, k \geqslant \bar{k}$$

y por lo tanto,

$$||x^k|| < ||x^m|| + 1 \qquad \forall\, k > \bar{k}$$

Entonces, sea

$$M = \max_{k=1, 2, \ldots \bar{k}} [\{||x^k||\} \cup \{||x^m|| + 1\}]$$

■

Lema 1.2 Sea $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy generada en un conjunto cerrado $S \subset E^n$. Entonces, $\exists\, \bar{x} \in S$ tal que $x^k \to \bar{x}$.

Prueba: Como $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset S \subset E^n$, y E^n es un espacio normado y completo,[29] la sucesión, por ser Cauchy, es convergente.

Supóngase pues, que: $x^k \to \bar{x} \notin S$. Entonces $\bar{x}$ está en el complemento de S que es un conjunto abierto y $\exists\, B(\bar{x}, \epsilon) \notin S; \epsilon > 0$.

Ahora, como $x^k \to \bar{x}$, $\exists\, \bar{k}$ tal que

$$x^k \in B(\bar{x}, \epsilon) \;\forall\; k > \bar{k}$$

lo cual implicaría que:

$$x^k \notin S \;\;\forall\;\; k > \bar{k}$$

pero esto es contradictorio. ■

Se termina esta sección recordando una propiedad muy importante de los conjuntos compactos; a saber:

Teorema 1.3: Si $S \neq \emptyset$ es un conjunto compacto, y la sucesión $\{x^k\} \subset S$, entonces $\exists\, K \subset \mathcal{Z}^+$ tal que:

$$x^k \to \bar{x} \in S$$

cuando

$$k \to \infty; k \in K.$$

Es decir, toda sucesión de puntos generada en un conjunto compacto, posee cuando menos una subsucesión que converge a un punto del conjunto.[41]

1.6 FUNCIONES CONTINUAS Y FUNCIONES DIFERENCIABLES

La mayoría de las funciones que se consideran en este texto serán diferenciables. Como se recordará de los cursos de cálculo, diferenciabilidad significa que una función tiene ciertas propiedades de continuidad sobre la derivada. A continuación se recuerda lo que es una función continua y se da una definición de diferenciabilidad.

Hay varias formas de especificar una función, y éstas se verán a lo largo del texto. Sin embargo, cuando se habla de una función en general, lo normal es que en primer término se establezca la correspondencia de los espacios que ésta relaciona. Así, es común escribir "$f: X \to Y$" que se interpreta como "la

función 'f' que transforma los elementos del espacio, subespacio o conjunto X en elementos del espacio, subespacio o conjunto Y". Por ejemplo, $g: E^n \to \Re$, es una función de elementos de E^n a los reales, etc.

Definición: Se dice que la función $f: E^n \to E^m$ es continua en el punto $x \in E^n$ si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$||x - y|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| < \epsilon$$

Dicho de otra manera, si dada una vecindad V de $f(x)$, existe una vecindad U de x tal que $f(y) \in V$, para toda $y \in U$.

Definición: Una función $f: E^n \to E^m$ es continua en E^n si es continua $\forall\, x \in E^n$.

Una propiedad que se utiliza con mucha frecuencia es la que se refiere a conservación de signos. Es decir, si una función real es continua y tiene un determinado signo en un punto, conservará el signo en una vecindad de dicho punto. Esto se demuestra a continuación.

Teorema 1.4: Sea $f: E^n \to \Re$ una función continua y $\overline{x} \in E^n$, tal que $f(\overline{x}) > 0$. Entonces, existe $\delta > 0$, tal que $f(x) > 0\ \forall\, x \in B(\overline{x}, \delta)$

Prueba: Si $f(\overline{x}) > 0$, entonces $\frac{1}{2} f(\overline{x}) > 0$. Sea $\epsilon = \frac{1}{2} f(\overline{x})$. Entonces, por continuidad, existe $\delta > 0$ tal que:

$$||x - \overline{x}|| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| < \epsilon$$

entonces, $||x - \overline{x}|| < \delta \Rightarrow f(x) = f(x) - f(\overline{x}) + f(\overline{x})$

$$\geqslant f(\overline{x}) - |f(x) - f(\overline{x})|$$

$$> 2\epsilon - \epsilon = \epsilon > 0 \quad \blacksquare$$

Las funciones continuas tienen una propiedad importantísima, que es la de "preservar" la convergencia de sucesiones.

Teorema 1.5: Una función $f: E^n \to E^m$ es continua en $\overline{x}$ si y sólo si $\forall$ sucesión $\{x^k\}$ tal que $x^k \to \overline{x}; f(x^k) \to f(\overline{x})$ cuando $x^k \to \overline{x}$.

Prueba: a) f continua $\Rightarrow f(x^k) \to f(\overline{x})$ cuando $x^k \to \overline{x}$

Tómese $\epsilon > 0$, como f es continua $\exists\, \delta > 0$, tal que

$$||x^k - \overline{x}|| < \delta \Rightarrow ||f(x^k) - f(\overline{x})|| < \epsilon$$

Pero $x^k \to \overline{x}$ quiere decir que existe $k(\delta)$ tal que

$||x^k - \overline{x}|| < \delta\ \forall\, k \geqslant k(\delta)$ y $||f(x^k) - f(\overline{x})|| < \epsilon$ por continuidad de f.

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0 \; \exists \; k$, en este caso $k(\delta)$, tal que

$$||f(x^k) - f(\overline{x})|| < \epsilon \; \forall \; k \geqslant k(\delta).$$

b) Si $\forall \; \{x^k\}$ tal que $x^k \to \overline{x}$ se tiene que $f(x^k) \to f(\overline{x})$ entonces f es continua.

Supóngase lo contrario. Entonces, existe $\epsilon > 0$, tal que no se puede encontrar δ para el cual $||x - \overline{x}|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(\overline{x})|| < \epsilon$.

$$\text{Sea } B_k = \left\{ x \mid ||x - \overline{x}|| < \frac{1}{k} \right\}$$

entonces, tiene que haber $x^k \in B_k$, tal que

$$||f(x^k) - f(\overline{x})|| > \epsilon \; \forall \; k$$

Pero como $x^k \to \overline{x}$ se tiene la contradicción deseada. Es decir, se ha construido una sucesión $\{x^k\}$ que converge a $\overline{x}$, tal que $f(x^k)$ no converge a $f(\overline{x})$.

■

Se termina este punto definiendo lo que se entiende por una función diferenciable, recordando el teorema de valor medio, y algunas propiedades de funciones diferenciables.

Definición: La función f: $E^n \to \mathcal{R}$ tiene una *derivada parcial* en el punto $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ *con respecto* a x_i, si existe el límite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(x + \tau \, e_i) - f(x)}{\tau}$$

Al vector de derivadas parciales se le denota por

$$\nabla f(x)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Definición: Se dice que f: $E^n \to \mathcal{R}$ es *diferenciable* en x con el sentido de *Frèchet*, si existe una función continua g: $E^n \to E^n$ tal que

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{f(x + \tau \, d) - f(x) - g(x)^T \tau \, d}{\tau} = 0 \quad \forall \; d \in E^n.$$

A la función g se le conoce como *el gradiente* de f en x. Posteriormente se probará que en E^n, si el gradiente existe, es $\nabla \, f(x)$.

Aquí hay que notar que la existencia de derivadas parciales *no implica* que una función sea diferenciable. Esto se debe a que pueden haber discontinuidades en las derivadas parciales.

Ejemplo 1.1

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x, y \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

Se puede comprobar que no existe el gradiente aunque $f(x, y)$ es continua en 0 y que las derivadas parciales existen pero no son continuas en $x = y = 0$, por lo que $\nabla f(x, y)$ no es continua y f no es diferenciable.

El teorema de valor medio

Sea $f: S \to \Re$ una función con derivadas parciales continuas, definida sobre una bola abierta $S \subset E^n$. Entonces, dados $x, y \in S$, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$f(x) - f(y) = \nabla f(\overline{x})^T \, (x - y)$$

Donde $\overline{x} = \theta\, x + (1 - \theta)\, y$

Con esto se puede demostrar que si $\nabla f(x)$ es continuo, f es diferenciable.

Teorema 1.6: Sea $f: S \to \Re$ una función definida sobre una bola abierta $S \subset E^n$ tal que $\nabla f(x)$ existe y es continua $\forall\, x \in S$. Entonces, f es diferenciable sobre S.

Prueba: Se requiere demostrar que

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{f(x + \tau\, d) - f(x) - \nabla f(x)^T \tau\, d}{\tau} = 0$$

para todo $d \in E^n$; $x \in S$.

Tómese cualquier $d \in E^n$ y $\overline{x} \in S$. Sean

$$x = \overline{x} + \tau d \qquad y = \overline{x}$$

Entonces, el teorema de valor medio dice que existe $\theta(\tau) \in (0, 1)$ tal que

$$f(\overline{x} + \tau\, d) - f(\overline{x}) = \nabla f(\widetilde{x})^T \, (\overline{x} + \tau d - \overline{x}) = \nabla f(\widetilde{x})^T \, \tau d$$

donde

$$\widetilde{x} = \theta(\tau)\, x + (1 - \theta(\tau))\, y = \overline{x} + \theta(\tau)\, \tau d$$

Por lo tanto:

$$f(\bar{x}+\tau d)-f(\bar{x})-\nabla f(\bar{x}+\theta(\tau)\tau d)^T\,\tau d=0$$

Pero ∇f es continuo, por lo tanto, $\theta(\tau)$ es continua en el intervalo y:

$$f(\bar{x}+\tau d)-f(\bar{x})-\nabla f(\bar{x}+\theta(\tau)\tau d)^T\,\tau d=0 \quad \forall\,\tau$$

Entonces, se puede dividir entre τ y tomar el límite correspondiente. ■

1.7 LA EXPANSION DE TAYLOR EN E^n

Para f: $E^n \to \mathcal{R}$, dado $x^1 \in E^n$ se tiene que:

a) Si f es diferenciable una vez existe $\theta \in [0, 1]$ tal que

$$f(x)=f(x^1)+\nabla f(x^1+\theta(x-x^1))^T\,(x-x^1)$$

b) Si f tiene segundas derivadas parciales continuas (i. e. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ son continuas), existe $\theta \in [0, 1]$ tal que

$$f(x)=f(x^1)+\nabla f(x^1)^T\,(x-x^1)+\frac{1}{2}\,(x-x^2)^T H(x-\theta\,(x-x^1))\,(x-x^1)$$

Donde $H(x)$ denota la matriz de segundas derivada parciales de f. Como es sabido, esta expansión da aproximaciones lineales y cuadráticas a la función.

1.8 EL CONCEPTO DE MAXIMA COTA INFERIOR O INFIMO

Definición: Se dice que "m" es *una cota inferior* del conjunto $A \subset \mathcal{R}$, si $m \leqslant a \quad \forall\, a \in A$.

Definición: Para el conjunto $A \subset \mathcal{R}$ que tiene una cota inferior m, se dice que β es al *máxima cota inferior* o *ínfimo* de A, si

i) $\beta \leqslant a \quad \forall\, a \in A$
ii) $m \leqslant a \quad \forall\, a \in A \Rightarrow m \leqslant \beta$

Si β es el ínfimo de A, se denota de la manera siguiente: $\beta = \inf A$. Análogamente, se tiene el concepto de *mínima cota superior* o *supremo*, y si γ es el supremo de A, se denota según $\gamma = \sup A$.

Este concepto conduce al siguiente resultado de análisis real que es muy importante.

Teorema 1.7: Si $A \subset \mathcal{R}$, $A \neq \emptyset$ es un conjunto que tiene una cota inferior, entonces A tiene un ínfimo.

1.9 EL TEOREMA DE LA FUNCION IMPLICITA

Antes de seguir adelante, es conveniente aclarar la notación usada. Así, sea F: $E^n \to E^m$ una función formada por f_i: $E^n \to \mathcal{R}$ funciones diferenciables; $i = 1, 2, \ldots, m$. Entonces, ∇F denota la matriz "Jacobina" de F, cuyas columnas son los vectores ∇f_i; $i = 1, 2, \ldots, m$ de derivadas parciales de las funciones f_i; $i = 1, 2, \ldots, m$.

Además, si se parte x según (u, v) tal que $u \in E^p$; $v \in E^{n-p}$, se denota por:

$$\nabla_u f_i(u, v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_i(u, v)}{\partial u_1} \\ \\ \dfrac{\partial f_i(u, v)}{\partial u_p} \end{pmatrix} ; \nabla_v f_i(u, v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_i(u, v)}{\partial v_1} \\ \\ \dfrac{\partial f_i(u, v)}{\partial v_{n-p}} \end{pmatrix}$$

Con esto, las matrices $\nabla_u F(u, v)$ y $\nabla_v F(u, v)$, son las matrices cuyas columnas son $\nabla_u f_i(u, v)$ y $\nabla_v f_i(u, v)$, respectivamente.

Ahora, considérese un sistema de ecuaciones

$$G(x) = 0$$

Donde G: $E^n \to E^m$; es decir, G está definido por m funciones g_i: $E^n \to \mathcal{R}$. Pártase $x \in E^n$ según $x \equiv (u, v)$, donde $u \in E^p$; $v \in E^{n-p}$. Los teoremas de la función implícita, y en particular el que aquí se presenta, tratan de las condiciones bajo las cuales las ecuaciones

$$G(u, v) = 0$$

se pueden resolver para v, como una función de u. Es decir, bajo qué condiciones existen funciones w: $E^{n-p} \to E^p$ tales que

$$G[w(v), v] = 0$$

Según Hestenes,[15] estas ecuaciones se pueden resolver fijando v y minimizando sobre u la función

$$F[u(v), v] = \min_{u} G(u, v)^T \; G(u, v)$$

Sin embargo, no siempre se puede garantizar que $u(v)$ resultante de minimizar $F(u, v)$ sobre u para v fija, será tal que $G[u(v), v] = 0$. Para esto, se requiere una *condición de regularidad* que para el teorema que aquí se enuncia es la siguiente: Para el sistema definido, sea $\nabla G(u, v)$ la matriz "Jacobina" cuyas columnas son los vectores de derivadas parciales de las funciones g_i. Entonces, se dice que se cumple la *condición de regularidad* en $(\overline{u}, \overline{v})$, si las columnas de $\nabla G(\overline{u}, \overline{v})$ son linealmente independientes, o lo que es lo mismo, que ∇G tiene rango "m". En este caso, se dice que $(\overline{u}, \overline{v})$ es un *punto regular.*

Teorema 1.8 (De la Función Implícita). Sea G: $S \to E^m$ una función diferenciable k-veces, definida sobre un conjunto abierto $S \subset E^n$, donde $n > m$. Sea $\overline{x} = (\overline{u}, \overline{v}) \in S$ un punto regular tal que $\overline{u} \in E^m$; $\overline{v} \in E^{n-m}$ y

$$G(\overline{u}, \overline{v}) = 0$$

Entonces, $\exists$ $B(\overline{x}, \epsilon) \subset S$; un conjunto abierto $V \subset E^{n-m}$ que contiene a $\overline{v}$ y una función h: $E^{n-m} \to E^m$, tal que se satisfacen las condiciones siguientes:

a) $\overline{u} = h(\overline{v})$.
b) $G(h(v), v) = 0 \quad \forall v \in V$.
c) La matriz Jacobina $\nabla G(x)$ tiene rango "m" $\forall x \in B(\overline{x}, \epsilon)$ (i.e. todo $x \in B(\overline{x}, \epsilon)$ es un punto regular).
d) La función h es diferenciable k-veces $\forall v \in V$ y su matriz Jacobina ∇h satisface la ecuación:

$$\nabla h(v) \nabla_u G(h(v), v) = -\nabla_v G(h(v), v)$$

Este teorema se utiliza en el texto para la caracterización de funciones pseudo y cuasi-convexas doblemente diferenciables, y para el desarrollo de la teoría clásica de optimización.

Con esto se concluye el brevísimo repaso que se requiere para empezar el texto. Sin embargo, esto no significa que se han cubierto todos los conceptos que se requieren para entender el material que sigue. Como se verá, hay muchos más conceptos que serán utilizados y que serán recordados en la medida que el material que se exponga lo exija.

2 *Conjuntos convexos*

INTRODUCCION

Uno de los temas de las matemáticas que han cobrado mayor importancia recientemente es el de convexidad. Aunque ya en el siglo pasado se conocían algunos resultados importantes, el primer estudio sistemático aparece en 1911, con la obra de Minkowski[34] y años después, otro por Bonnesen y Fenchel en un texto del mismo nombre.[4] Actualmente, se acepta como obra clásica la de Rockafellar, y constantemente aparecen nuevos textos que tratan el tema (vgr. Lay).[27] Curiosamente, el interés actual en el estudio de la convexidad se debe en gran parte al auge casi paralelo que hay en el estudio de la optimización matemática. Así, se ha establecido un mecanismo de retroalimentación entre los dos campos, que ha materializado en una serie de resultados importantes en ambas ramas del conocimiento matemático.

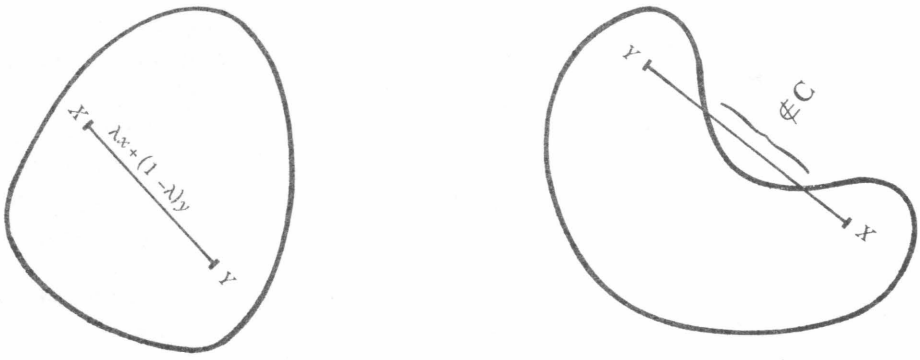
En este capítulo, se presentan los resultados más relevantes de los conjuntos convexos, para propósitos de la teoría de optimización. Lo que se hará, es desarrollar las principales propiedades de separación de los conjuntos convexos, que permitirán demostrar varios teoremas importantes de los llamados "de alternativas", como el de Farkas y el de Gordan. Estos teoremas se encuentran con frecuencia en distintos aspectos de optimización matemática. Para los propósitos de este texto, son la piedra angular para obtener condiciones de optimalidad como las de Fritz-John y las de Karush, Kuhn y Tucker.

2.1 CONJUNTOS CONVEXOS

Definición: Se dice que el conjunto $C \subset E^n$ es *convexo* si, dados $x, y \in C$, se tiene que:

$$\lambda x + (1 - \lambda)\, y \in C \quad \forall\, \lambda \in [0, 1]$$

Geométricamente, la definición anterior dice que C es convexo si, dados dos puntos cualesquiera del conjunto, se tiene que los puntos sobre la recta que los une también están en el conjunto. Esto se muestra gráficamente en la figura 2.1.



Un conjunto convexo

Un conjunto no-convexo

Figura 2.1

Lema 2.1 Si C_1 y C_2 son conjuntos convexos, entonces:

a) $C_1 \cap C_2 = \{x | x \in C_1 ; x \in C_2\}$ es un conjunto convexo.
b) $C_1 + C_2 = \{x + y | x \in C_1 ; y \in C_2\}$ es convexo.
c) $C_1 - C_2 = \{x - y | x \in C_1 ; y \in C_2\}$ es convexo.

Prueba:

a) Sean $x, y \in C_1 \cap C_2$. A continuación se demuestra que:

$$\lambda x + (1 - \lambda)\, y \in C_1 \cap C_2 \quad \forall\, \lambda \in [0, 1]$$

En primer lugar, nótese que si $x, y \in C_1 \cap C_2$ entonces

$$x, y \in C_1 ; x, y \in C_2$$

Ahora, como C_1 y C_2 son convexos, se tiene que:

$$\lambda x + (1 - \lambda)\, y \in C_1 \quad \text{y} \quad \lambda x + (1 - \lambda)\, y \in C_2 \quad \forall\, \lambda \in [0, 1]$$

o lo que es lo mismo:

$$\lambda x + (1 - \lambda)\, y \in C_1 \cap C_2 \quad \forall\, \lambda \in [0, 1]$$

b) Sean $w, z \in C_1 + C_2$. Entonces, $\exists\, x_w, x_z \in C_1$ y $y_w, y_z \in C_2$ tales que:

$$w = x_w + y_w \in C_1 \text{ y } z = x_z + y_z \in C_2$$

Por lo tanto, $\lambda w + (1-\lambda)z = \lambda(x_w + y_w) + (1-\lambda)(x_z + y_z)$

$$= [\lambda x_w + (1-\lambda)x_z] + [\lambda y_w + (1-\lambda)y_z] \in C_1 + C_2$$

ya que $\lambda x_w + (1-\lambda)x_z \in C_1$ y $\lambda y_w + (1-\lambda)y_z \in C_2$ $\quad \forall\, \lambda \in [0, 1]$

c) Se deja como ejercicio al lector. ■

En el ejemplo siguiente se demuestra que cualquier semiespacio cerrado es un conjunto convexo.

Ejemplo 2.1 Sea $C = \{x \in E^n \mid c^T x \leqslant b\}$ se probará que este conjunto es convexo.

Sean $x, y \in C$, tómese $\lambda \in [0, 1]$ y examínese lo que sucede con

$$c^T(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda c^T x + (1-\lambda)c^T y$$

$$\leqslant \lambda b + (1-\lambda)b = b \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

y por lo tanto C es un conjunto convexo. ■

2.2 EL CASCO CONVEXO DE UN CONJUNTO

Para comprender la definición siguiente es necesario definir el concepto de combinación convexa; a saber:

Definición: Sean $x^i \in E^n$; $i = 1, 2, \ldots, p$ un conjunto finito de puntos, y

$$\lambda_i \in \mathcal{R};\ i = 1, 2, \ldots, p \text{ tales que } \lambda_i \geqslant 0 \quad \forall\, i;\ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$$

Entonces $\overline{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i$ es una *combinación convexa* de los puntos $\{x^i\}_{i=1}^{p}$.

Definición: Dado un conjunto $S \subset E^n$, el *Casco Convexo* $H(S)$, de S, es el conjunto de todas las combinaciones convexas de un número finito de elementos de S.

Se deja al lector demostrar que si C es un conjunto convexo y $\{x^i\}_{i=1}^{p} \subset C$, entonces cualquier combinación convexa de estos puntos tam-

bién está en C. Asimismo, el lector deberá convencerse de que $H(S)$ es un conjunto convexo.

Lema 2.2 Dado $S \subset E^n$, entonces $H(S)$ es el conjunto convexo más pequeño que contiene a S.

Prueba: Sea C un conjunto convexo que contiene a S. En primer lugar se demuestra que $H(S) \subset C$.

Sea $x \in H(S)$; se tiene que demostrar que $x \in C$. Pero esto es obvio ya que:

$$x \in H(S) \Rightarrow \exists\, x^1, x^2, \ldots, x^k \in S$$

y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$ tales que:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \; ; \; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

Pero, $S \subset C \Rightarrow x_i \in C$ para $i = 1, 2, \ldots, k$ y como C es convexo, $x = \Sigma \lambda_i x^i \in C$.

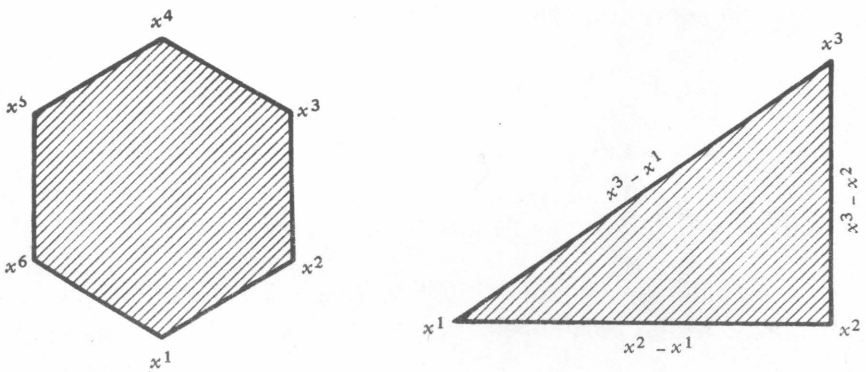
Finalmente, como $H(S) \subset C$ para cualquier conjunto convexo C que contiene a S, $H(S)$ está en la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S. Pero esto sólo puede ser cierto si $H(S)$ es, de hecho, la intersección de todos estos conjuntos. ■

Definición: El casco convexo de un número finito de puntos

$x^1, x^2, \ldots, x^k \in E^n$ es un *poliedro.*

Definición: Si $x^2 - x^1, x^3 - x^1, \ldots, x^{k+1} - x^1$ son linealmente independientes, entonces al casco convexo de $x^1, x^2, \ldots, x^{k+1}$ se le denomina un *simplex* con vértices $x^1, x^2, \ldots, x^{k+1}$.

Estos conceptos se ilustran en la figura 2.2.



a) Un poliedro

b) Un simplex

Figura 2.2

Nótese que en E^n no pueden existir más de n vectores linealmente independientes. Por lo tanto, ningún simplex puede tener más de $n + 1$ vértices.

Teorema 2.3 (Carathéodory). Sea $S \subset E^n$. Entonces,

$$\forall\, x \in H(S) \quad \exists x^1, \ldots, x^{n+1} \in S$$

tales que $x \in H(x^1, x^2, \ldots, x^{n+1})$. Es decir, x está en algún simplex formado por puntos de S.

Prueba: Hay que demostrar que, si $x \in H(S)$ $\exists\, x^1, x^2, \ldots, x^{n+1} \in S$, y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1} \geqslant 0$; $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, tales que:

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x^i$$

Por definición de $H(S)$ se sabe que $\exists\, x^1, x^2, \ldots, x^k \in S$, tales que: $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$ con $\lambda_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$ y $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Entonces, si $k \leqslant n + 1$, no hay más que probar. Supóngase, por lo tanto, que $k > n + 1$. Entonces,

$$x^2 - x^1, x^3 - x^1, \ldots, x^k - x^1$$

son linealmente dependientes y $\exists$ números $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k$, no todos cero, tales que:

$$\sum_{i=2}^{k} \mu_i (x^i - x^1) = 0$$

Sea $\mu_1 = -\sum_{i=2}^{k} \mu_i$.

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{k} \mu_i x^i = 0$$

y además, se sabe que no todos los μ_i son cero. Ahora:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i + \alpha \sum_{i=1}^{k} \mu_i x^i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \alpha \mu_i) x^i$$

para cualquier número real α. En particular, sea

$$\alpha = \min_{i=1,2,\ldots,k} \{\frac{\lambda_i}{\mu_i} \mid \mu_i > 0\}$$

Entonces, $\alpha = \dfrac{\lambda_m}{\mu_m}$ para alguna $m \in \{1, 2, \ldots, k\}$

a) Nótese que $\alpha > 0$ ya que $\mu_m > 0; \lambda_m > 0$

b) $\lambda_i - \alpha \mu_i \geqslant 0; i = 1, 2, \ldots, k.$

Para ver esto, examínense los tres casos siguientes:

i) Si $\mu_i \leqslant 0$ el resultado es obvio.

ii) Si $\mu_i > 0$, entonces,

$$\lambda_m \qquad \lambda_i - \alpha \mu_i = \lambda_i - \frac{\lambda_m}{\mu_m} \mu_i \geqslant 0$$

$$\text{ya que} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \geqslant \frac{\lambda_m}{\mu_m} = \alpha \text{ por definición de } \alpha$$

iii) $\lambda_m - \alpha \mu_m = 0$ por la definición de α

c) $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i - \alpha \mu_i) = 1$

Entonces, $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^{k} \theta_i x^i = \sum_{i \neq m} \theta_i x^i$

donde: $\theta_i = \lambda_i - \alpha \mu_i$ son tales que

$$\theta_i > 0 \quad \forall\, i \neq m; \theta_m = 0; \Sigma\, \theta_i = 1$$

Se ha logrado representar a x como una combinación convexa de $k - 1$ puntos, y si $k - 1 = n + 1$, se obtiene lo deseado. De lo contrario se puede repetir el proceso hasta lograrlo. ■

2.3 ALGUNAS PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE CONJUNTOS CONVEXOS

Definición: Dado $S \subset E^n$, se dice que x está en la "cerradura" de S denotada $\bar{S}$ si $\forall\, B(x, \epsilon); \epsilon > 0$, se tiene que $B(x, \epsilon) \cap S \neq \emptyset$.

Definición: Se dice que $x \in S$ es un *punto interior* de S si $\exists\, B(x, \epsilon); \epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset S$. Al conjunto de todos los puntos interiores de S o "interior de S", se le denota por $\mathring{S}$.

Obviamente, si todos los puntos de S son interiores, S es un conjunto abierto.

Definición: Se dice que $\overline{x}$ está en la "frontera" de S, denotada ∂S, si $\forall\, B(\overline{x}, \epsilon); \epsilon > 0$ contiene puntos en S y puntos fuera de S. (i.e. $\exists\, x, y \in B(\overline{x}, \epsilon)$ tales que $x \in S; y \notin S$).

Teorema 2.4 Sea $S \subset E^n$ un conjunto convexo con un interior no vacío. Sean x un punto en la cerradura de S, "y" un punto interior de S, y

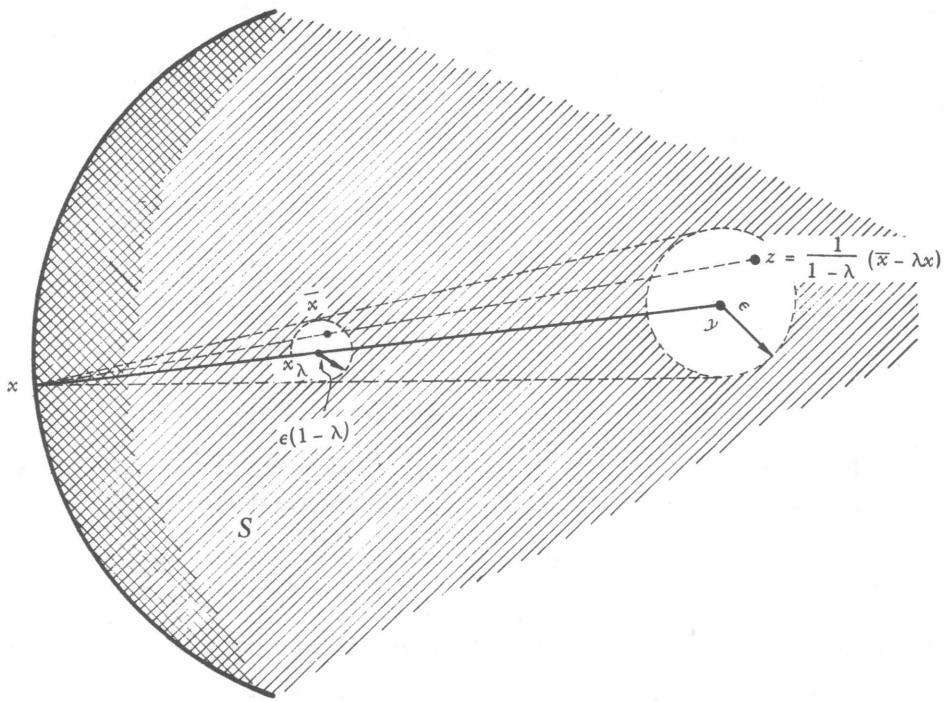
$$C = \{x_\lambda \in E^n \mid x_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)y; \lambda \in (0, 1)\}$$

Entonces, cualquier $x_\lambda \in C$ es un punto interior de S.

Prueba: Nótese que si $x \in \overset{0}{S}$ el resultado es obvio. Por lo tanto supóngase que x está en la frontera. En primer lugar, se va a demostrar que $C \subset S$, y el resultado es después, prácticamente inmediato. La idea de la prueba se muestra esquemáticamente en la figura 2.3.

Si $y \in \overset{0}{S}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(y, \epsilon) \subset \overset{0}{S}$. Además, si $x \in \tilde{S}$, para cualquier $\delta > 0$ se tiene que $S \cap B(x, \delta) \neq \emptyset$. Ahora, sea $u \in S \cap B(x, \delta)$ y considérese:

$$\delta = \frac{1-\lambda}{\lambda}\,\epsilon, \qquad v = y - \frac{\lambda}{1-\lambda}(u - x)$$



$$x_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)y \in S \Rightarrow \bar{x} = \lambda x + (1-\lambda)\,z \in S$$

y por lo tanto, $B(x_\lambda, \epsilon(1-\lambda)) \subset S$

Figura 2.3

Entonces,

$$||y - v|| = \frac{\lambda}{1-\lambda} ||u - x|| < \frac{\lambda}{1-\lambda} \delta = \epsilon$$

y por lo tanto, $v \in B(y, \epsilon)$. Esto significa que $u, v \in S$, y por lo tanto,

$$\lambda u + (1 - \lambda) v \in S,$$

por ser S un conjunto convexo.

Sin embargo:

$$\lambda u + (1 - \lambda) v = \lambda u + (1 - \lambda) [y - \frac{\lambda}{1-\lambda} (u - x)] = \lambda x + (1 - \lambda) y = x_\lambda$$

Ahora hay que demostrar que existe ϵ_λ tal que $B(x_\lambda, \epsilon_\lambda) \subset S$. Considérese,

$$\epsilon_\lambda = \epsilon(1 - \lambda)$$

y sean, $\overline{x} \in B(x_\lambda, \epsilon_\lambda)$ y $z = \frac{1}{1-\lambda} (\overline{x} - \lambda x)$

Nótese que $z \in B(y, \epsilon) \subset \overset{0}{S}$, ya que:

$$||y - z|| = ||y - \frac{1}{1-\lambda} (\overline{x} - \lambda x)|| = \frac{1}{1-\lambda} ||(1 - \lambda) y - \overline{x} + \lambda x||$$
$$= \frac{1}{1-\lambda} ||x_\lambda - \overline{x}|| < \epsilon$$

Ahora, nótese que $\overline{x} = \lambda x + (1 - \lambda) z$ donde $x \in \tilde{S}$; $z \in \overset{0}{S}$ y por el resultado anterior $\overline{x} \in S$. Así, $B(x_\lambda, \epsilon_\lambda) \subset S$ como se quería demostrar. ■

Este teorema tiene cuatro corolarios:

Corolario 1: Si S es un conjunto convexo, entonces su interior $\overset{0}{S}$ también lo es.

Corolario 2: Si S es un conjunto convexo con un interior no vacío, entonces su cerradura $\tilde{S}$ también es un conjunto convexo.

Corolario 3: Sea S un conjunto convexo con interior no vacío. Entonces la cerradura del interior de S es igual a la cerradura de S.

Corolario 4: Sea S un conjunto convexo con interior no vacío. Entonces, el interior de la cerradura de S es igual al interior de S.

2.4 SEPARACION Y SOPORTE DE CONJUNTOS CONVEXOS Y TEOREMAS DE ALTERNATIVAS

En esta sección se introducen las nociones de hiperplanos de soporte y separación de conjuntos convexos. Estas nociones son muy importantes en teoría de optimización, ya que las condiciones de optimalidad y las relaciones de dualidad utilizan de alguna forma estos conceptos.

2.4.1 La distancia mínima de un punto a un conjunto convexo

A continuación se demuestra que si S es un conjunto convexo cerrado e $y \notin S$; $\exists\ \bar{x} \in S$ que minimiza la distancia entre "y" y cualquier punto en S. Esto se enuncia formalmente en el siguiente teorema.

Teorema 2.5 Sea $S \subset E^n$ un conjunto convexo no-vacío y cerrado, y sea $y \notin S$. Entonces, $\exists\ \bar{x} \in S$ que minimiza la distancia entre "y" y cualquier $x \in S$. Además, $\bar{x}$ es único y satisface la relación:

$$(x - \bar{x})^T (\bar{x} - y) \geqslant 0 \quad \forall x \in S$$

si y sólo si $\bar{x}$ es el punto en S más cercano a y.

Prueba:

i) Primero se prueba la existencia de $\bar{x}$.

Sea $\gamma = \inf \{ \|y - x\| \mid x \in S \}$. Del teorema 1.7, se sabe que el ínfimo existe ya que la función $f(x) = \|y - x\|$ está acotada por debajo de cero. Además $\gamma > 0$ ya que $y \notin S$ y S es cerrado.

Sea $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset S$ una sucesión tal que

$$\lim_{k \to \infty} \|y - x^k\| = \gamma$$

A continuación se demuestra que $x^k \to \bar{x} \in S$, demostrando que $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ tiene la propiedad de Cauchy.

De la ley del paralelogramo se sabe que

$$\|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|)^2 - \|a + b\|^2$$

Sean: $a = x^k - y$
$b = x^m - y$

Entonces:

$$\|a-b\|^2 = \|x^k - y - (x^m - y)\|^2 = \|x^k - x^m\|^2$$
$$= 2\|x^k - y\|^2 + 2\|x^m - y\|^2 - \|x^k + x^m - 2y\|^2$$
$$= 2\{\|x^k - y\|^2 + \|x^m - y\|^2\} - 4\left\|\frac{x^k + x^m}{2} - y\right\|^2$$

Como S es un conjunto convexo, se tiene que:

$$\frac{x^k + x^m}{2} \in S \text{ y por lo tanto,}$$

$$\left\|\frac{x^k + x^m}{2} - y\right\|^2 \geqslant \gamma^2$$

De lo anterior se deduce que:

$$\|x^k - x^m\|^2 \leqslant 2\{\|x^k - y\|^2 + \|x^m - y\|^2\} - 4\gamma^2$$

Además, $\|x^k - y\|^2 \to \gamma^2$ y, por lo tanto, dado $\epsilon > 0 \exists\, k$ tal que:

$$\gamma^2 \leqslant \|x^k - y\|^2 < \gamma^2 + \frac{\epsilon^2}{4} \quad \forall\, k > \overline{k}$$

Entonces, para $k, m > \overline{k}$ se tiene que:

$$\|x^k - x^m\|^2 < 2(\gamma^2 + \frac{\epsilon^2}{4} + \gamma^2 + \frac{\epsilon^2}{4}) - 4\gamma^2 = \epsilon^2$$

$$\|x^k - x^m\| < \epsilon \quad \forall\, k, m > k.$$

pero esto significa que $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ es Cauchy, y por lo tanto, $x^k \to \overline{x} \in S$, por el lema 1.2.

ii) Ahora se demuestra que $\overline{x}$ es único.

Supóngase que $\exists\, \overline{\overline{x}}$ tal que $\|\overline{\overline{x}} - y\| = \gamma$
Como S es un conjunto convexo, se tiene que
$\lambda\overline{x} + (1-\lambda)\,\overline{\overline{x}} \in S \quad \forall\, \lambda \in [0, 1]$ y en particular para $\lambda = ½$
Entonces:

$$\|y - (\lambda\overline{x} + (1-\lambda)\overline{\overline{x}})\| = \|y - (\tfrac{1}{2}\overline{x} + \tfrac{1}{2}\overline{\overline{x}})\|$$

$$= \|\tfrac{1}{2}(y - \overline{x}) + \tfrac{1}{2}(y - \overline{\overline{x}})\| \leqslant \tfrac{1}{2}\|y - \overline{x}\| + \tfrac{1}{2}\|y - \overline{\overline{x}}\| = \gamma$$

por la desigualdad del triángulo.

Nótese que $||y - \frac{1}{2}(\overline{x} + \overline{\overline{x}})|| < \gamma$ es imposible por la definición de γ. Entonces, debe ser cierto que:

$$||y - \tfrac{1}{2}(\overline{x} + \overline{\overline{x}})|| = \gamma$$

y por lo tanto, $y - \overline{x}$ y $y - \overline{\overline{x}}$ son *colineales*, ya que sólo así se cumple la desigualdad del triángulo con estricta igualdad. Entonces $\exists\ \lambda$ tal que,

$$y - \overline{x} = \lambda(y - \overline{\overline{x}})$$

Pero $||y - \overline{x}|| = ||y - \overline{\overline{x}}|| = \gamma$ implicando $|\lambda| = 1$. Supóngase que $\lambda = -1$, entonces:

$$2y = \overline{x} + \overline{\overline{x}} \Rightarrow y = \tfrac{1}{2}(\overline{x} + \overline{\overline{x}}) \in S, \text{ lo cual es contradictorio.}$$

Por lo tanto, $\lambda = 1$ y $\overline{x} = \overline{\overline{x}}$ demostrando unicidad.

iii) Para completar la demostración, es necesario probar que la condición

$$(x - \overline{x})^{\mathrm{T}}\ (\overline{x} - y) > 0\ \forall\ x \in S$$

es necesaria y suficiente para que $\overline{x}$ sea el elemento en S más cercano a y.
En primer término se prueba suficiencia:

$$(x - \overline{x})^T\ (\overline{x} - y) \geqslant 0 \quad \forall\ x \in S \Rightarrow \overline{x} \text{ es el más cercano.}$$

Sea $x \in S$. Entonces, por la ley del paralelogramo se tiene que:

$$\begin{aligned} ||y - x||^2 &= ||y - \overline{x} + \overline{x} - x||^2 \\ &= ||y - \overline{x}||^2 + ||x - \overline{x}||^2 + 2(x - \overline{x})^T\ (\overline{x} - y) \end{aligned}$$

Como $||x - \overline{x}||^2 \geqslant 0$ y $(x - \overline{x})^T\ (\overline{x} - y) \geqslant 0$ por hipótesis, se tiene que $||y - x||^2 \geqslant ||y - \overline{x}||^2 \quad \forall\ x \in S$. De aquí se concluye que $\overline{x}$ tiene que ser el punto en S más cercano a y.
Para concluir, se prueba la necesidad: Supóngase que $\overline{x}$ es tal que $||y - x||^2 \geqslant ||y - \overline{x}||^2 \quad \forall\ x \in S$, y tómese cualquier elemento $x \in S$. Como S es convexo $\lambda x + (1 - \lambda)\overline{x} = \overline{x} + \lambda(x - \overline{x}) \in S \quad \forall\ \lambda \in [0, 1]$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} ||y - \overline{x} - \lambda(x - \overline{x})||^2 &= ||y - \overline{x}||^2 + \lambda^2\,||x - \overline{x}||^2 - 2\lambda(\overline{x} - x)^T\ (\overline{x} - y) \\ &= ||y - \overline{x}||^2 + \lambda^2\,||x - \overline{x}|| + 2\lambda(x - \overline{x})^T\ (\overline{x} - y) \end{aligned}$$

De esta relación y la anterior se establece que:

$$\lambda^2 \|x - \bar{x}\|^2 + 2\lambda(x - \bar{x})^T (\bar{x} - y) \geqslant 0 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Finalmente, como $\lambda > 0$, se puede dividir entre λ y tomar el límite cuando $\lambda \to 0$. ■

2.4.2 Hiperplanos y separación de conjuntos convexos

Definición: Un *hiperplano H*, es un conjunto de puntos de la forma $H = \{x | p^T x = \alpha\}$, donde $p \in E^n$, $p \neq 0$ y $\alpha \in \mathcal{R}$. El vector p es el *vector normal* al hiperplano.

Cada hiperplano define dos semi-espacios:

$$H^+ = \{x | p^T x \geqslant \alpha\} \quad \text{y} \quad H^- = \{x | p^T x \leqslant \alpha\}$$

Nótese que:

i) $H = H^+ \cap H^-$
ii) $E^n = H^+ \cup H^-$

Por lo tanto, cualquier $x \in E^n$ está en H^+, en H^-, o en ambos.

En ocasiones, puede ser útil referir un hiperplano a uno de sus puntos. Así, si $\bar{x} \in E^n$ es tal que $p^T \bar{x} = \alpha$, entonces:

$$H = \{x | p^T x = \alpha\} = \{x | p^T (x - \bar{x}) = 0\}$$

Finalmente, es fácil comprobar que, si $H \subset E^n$, entonces H tiene dimensión $n - 1$.

Definición: Sean S_1, $S_2 \neq \emptyset$ dos conjuntos en E^n. Se dice que un hiperplano $H = \{x | p^T x = \alpha\}$ *separa* a S_1 de S_2 si:

i) $S_1 \subset H^+$ (i.e. $p^T x \geqslant \alpha \quad \forall x \in S_1$), y
$S_2 \subset H^-$ (i.e. $p^T x \leqslant \alpha \quad \forall x \in S_2$)
ó *ii)* $S_1 \subset H^-$ y $S_2 \subset H^+$

Definición: El hiperplano H separa *bien* a S_1 de S_2, si además de separarlos se tiene que: $S_1 \cup S_2 \not\subset H$.

Definición: El hiperplano H separa *estrictamente* a S_1 de S_2, si además de separarlos se tiene que:

i) $p^T x > \alpha \quad \forall x \in S_1$; $\quad p^T x < \alpha \quad \forall x \in S_2$
ó *ii)* $p^T x < \alpha \quad \forall x \in S_1$; $\quad p^T x > \alpha \quad \forall x \in S_2$

Definición: Se dice que el hiperplano H separa *fuertemente* a S_1 de S_2 si $\exists\ \epsilon > 0$, tal que:

$$\begin{aligned} &i)\ p^T x \geqslant \alpha + \epsilon \quad \forall\, x \in S_1\,; \quad p^T x \leqslant \alpha \quad \forall\, x \in S_2 \\ \text{ó}\quad &ii)\ p^T x \leqslant \alpha - \epsilon \quad \forall\, x \in S_1\,; \quad p^T x \geqslant \alpha \quad \forall\, x \in S_2 \end{aligned}$$

En la figura 2.4 se ilustran gráficamente los conceptos anteriores. En la figura 2.4*a*, se observa que el hiperplano H_1, separa *bien* a S_1 de S_2, mientras que el hiperplano H_2, los separa *fuertemente*. En la figura 2.4*b*, se muestra cómo un hiperplano puede separar dos conjuntos sin que la separación sea buena, ni estricta, ni fuerte. Obviamente este caso puede presentar ciertas patologías que las otras definiciones buscan evitar.

Ejemplo 2.2 Considérense los dos conjuntos siguientes:

$$S_1 = \{x|\ ||y - x|| < \alpha\}$$

$$S_2 = \{x|\ ||z - x|| < \beta\}$$

Donde $||z - y|| = \alpha + \beta + 2\epsilon;\ \alpha, \beta, \epsilon > 0$

Así, S_1 y S_2 son "hiper-esferas" abiertas con radios α, β y centros "y", "z" respectivamente. A continuación, se muestra que el hiperplano

$$H^1 = \{x|p^T\ (x - z) = (\beta + \epsilon)\ ||p||\}$$

separa a S_1 de S_2; donde $p = y - z$.

En primer término, nótese que, de la definición de H se obtiene una forma alternativa para expresar el hiperplano, de la manera mostrada en la figura 2.4.

$$\begin{aligned} p^T x &= p^T z + (\beta + \epsilon)\ ||p|| \\ &= p^T\ (z - y + y) + (\beta + \epsilon)\ ||p|| \\ &= -p^T p + p^T y + (\beta + \epsilon)\ ||p|| \\ &= p^T y - ||p||^2 + (\beta + \epsilon)\ ||p|| \\ &= p^T y + (\beta + \epsilon - ||p||)\ ||p|| \end{aligned}$$

Así, sustituyendo $||p|| = \alpha + \beta + 2\epsilon$ se obtiene que

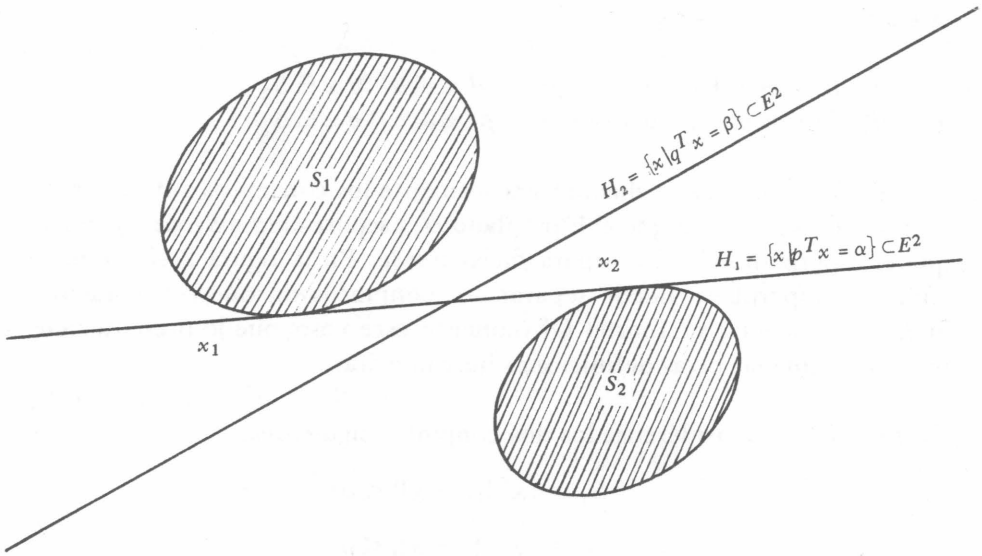
$$H^1 = H \equiv \{x|p^T\ (y - x) = (\alpha + \epsilon)\,||p||\}$$

Ahora, supóngase que $x \in S_1$. Entonces, se tiene que $||x - y|| < \alpha$ y:

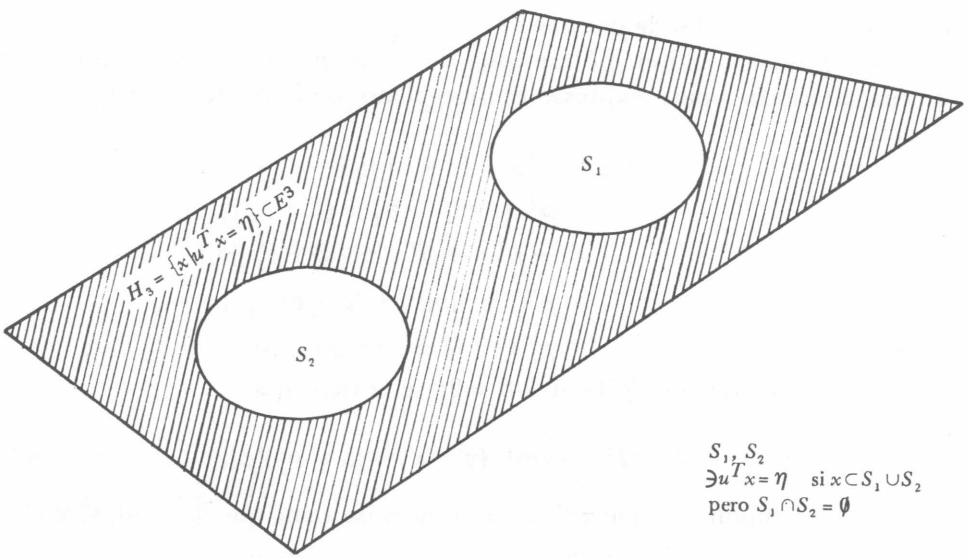
$$p^T\ (y - x) \leqslant ||p||\ ||y - x|| < \alpha\ ||p||$$

Por lo tanto, $x \in S_1 \Rightarrow p^T\ (y - x) < (\alpha + \epsilon)\ ||p||$. Es decir,

$$x \in S_1 \Rightarrow x \in H^-.$$



a)



b)

Figura 2.4 Hiperplanos de separación.

Finalmente, supóngase que $x \in S_2$ y nótese que:

$$p^T (x - z) \leqslant \beta \, ||p|| < (\beta + \epsilon) \, ||p||$$

ya que $||x - z|| < \beta$, si $x \in S_2$.

Ahora, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} p^T (x - z) &= p^T (x - z + y - y) \\ &= p^T (x - y) + p^T (y - z) \\ &= p^T (x - y) + ||p||^2 < (\beta + \epsilon) \, ||p|| \end{aligned}$$

Es decir,

$$p^T (x - y) < (\beta + \epsilon - ||p||) \, ||p||$$

Finalmente, sustituyendo $||p||$ por $\alpha + \beta + 2\epsilon$ se obtiene el resultado deseado; a saber:

$$p^T (x - y) < -(\alpha + \epsilon) \, ||p||$$

o lo que es lo mismo:

$$p^T (y - x) > (\alpha + \epsilon) \, ||p||$$

con lo cual se concluye que $x \in S_2$ implica que $x \in H^+$. Se deja al lector comprobar que $S_1 \subset (H^1)^+$ y $S_2 \subset (H^1)^-$. ■

El ejemplo anterior se muestra gráficamente en la figura 2.5. En el ejemplo siguiente se ilustran matemáticamente las definiciones, variando ϵ y cerrando los conjuntos S_1, S_2.

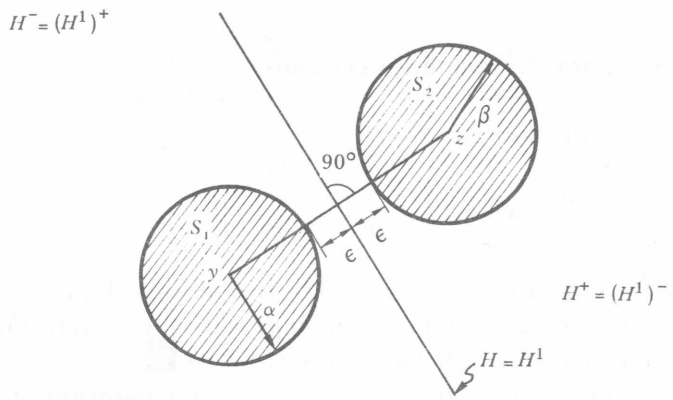


Figura 2.5 Separación de S_1 y S_2 del ejemplo 2.1.

Ejemplo 2.3 Considérense los conjuntos S_1, S_2 del ejemplo anterior. A continuación, se verá cómo se aplican las definiciones anteriores, haciendo algunas variaciones en la definición de conjuntos y parámetros.

a) En el caso del ejemplo 2.1, es obvio que, con $\epsilon > 0$, se tiene que el hiperplano H satisface todas las definiciones.

b) Supóngase que se hace $\epsilon = 0$.

Entonces, se tiene que el hiperplano separa estrictamente a S_1 de S_2. Se puede comprobar que en este caso no hay separación fuerte, ya que el punto

$$\overline{x} = z + \frac{\beta}{\|p\|} p$$

está tanto en la cerradura de S_1 como en la de S_2.
Para ver esto, examínese:

$$\|y - \overline{x}\| = \|y - z - \frac{\beta}{\|p\|} p\|$$

$$= \|(1 - \frac{\beta}{\|p\|})p\|$$

$$= \frac{\|p\|}{\|p\|} (\|p\| - \beta) = \alpha$$

ya que $\|p\| = \alpha + \beta$.
Análogamente, es fácil demostrar que $\|z - \overline{x}\| = \beta$. Así, cualquier $B(\overline{x}, \delta)$, con $\delta > 0$ tiene la característica de que $B(\overline{x}, \delta) \cap S_1 \neq \emptyset$ y $B(\overline{x}, \delta) \cap S_2 \neq \emptyset$.

c) Considérense los conjuntos cerrados:

$$\overline{S}_1 = \{x \mid \|y - x\| \leqslant \alpha\}$$

$$\overline{S}_2 = \{x \mid \|z - x\| \leqslant \beta\}$$

En este caso, al igual que el anterior, se dan todas las formas de separación si $\epsilon > 0$. En cambio, cuando $\epsilon = 0$, no puede haber separación estricta ni fuerte, como puede comprobar fácilmente el lector. ■

La relación que existe entre los cuatro tipos de separación, se muestra esquemáticamente en la figura 2.6. En esencia, separación fuerte ⇒ separación estricta ⇒ separación buena ⇒ separación.

Se deja al lector la prueba de estas relaciones.

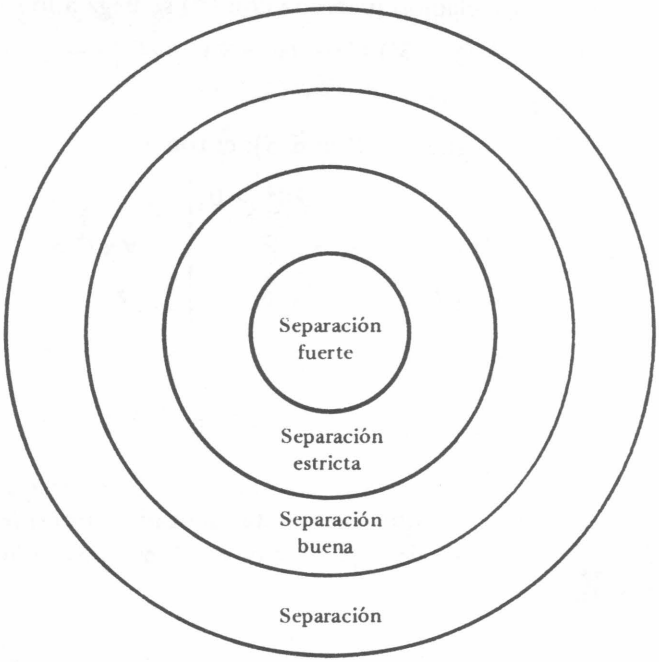


Figura 2.6.

2.4.3 Separación de un conjunto convexo y un punto, y los teoremas de Farkas, Motzkin y Gale

Teorema 2.6: Sea $S \subset E^n$ un conjunto convexo y cerrado, y sea $y \notin S$. Entonces, $\exists\, p \in E^n$ y $\alpha \in \Re$, tal que:

$i)$ $p^T y > \alpha$
$ii)$ $p^T x \leqslant \alpha \quad \forall\, x \in S$

Prueba: Del teorema anterior, $\exists\, \bar{x} \in S$ que minimiza la distancia entre "y" y cualquier punto $x \in S$. Además, se satisface la relación siguiente:

$$\left.\begin{aligned} &(x - \bar{x})^T\ (\bar{x} - y) \geqslant 0 \\ \text{ó} \quad &(x - \bar{x})^T\ (y - \bar{x}) \leqslant 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall\, x \in S$$

de donde se obtiene que:

$$-x^T\ (y - \bar{x}) \geqslant -\bar{x}^T\ (y - \bar{x}) \quad \forall\, x \in S \ \ldots\ (*)$$

Ahora examínese

$$||y - \bar{x}||^2 = (y - \bar{x})^T\ (y - \bar{x}) = y^T\ (y - \bar{x}) - \bar{x}^T\ (y - \bar{x}) > 0$$

De lo obtenido en la relación marcada con (*) se llega a lo siguiente:

$$0 < y^T (y - \bar{x}) - \bar{x}^T (y - \bar{x}) \leqslant y^T (y - \bar{x}) - x^T (y - \bar{x}) =$$

$$= (y - x)^T (y - \bar{x}) \quad \forall x \in S$$

Sea $p = y - \bar{x} \neq 0$ (ya que $y \notin S$; $\bar{x} \in S$), entonces:

$$\left.\begin{array}{rl} & p^T (y - x) \geqslant \|y - \bar{x}\|^2 > 0 \\ \text{i.e.} & p^T y \geqslant p^T x + \|y - \bar{x}\|^2 \\ & p^T x \leqslant p^T y - \|y - \bar{x}\|^2 \end{array}\right\} \quad \forall x \in S$$

Entonces, sean

$$\alpha = \sup_{x \in S} \{p^T x\}; \epsilon = \|y - \bar{x}\|^2 > 0$$

Nótese que α existe ya que $p^T x$ está acotado superiormente por $p^T y - \|y - \bar{x}\|^2$. Con esto se tiene $p^T y \geqslant \alpha + \epsilon > \alpha$ y por definición de α; $p^T x \leqslant \alpha \; \forall x \in S$. ■

Corolario 1: Sea $S \subset E^n$ un conjunto convexo cerrado y sea $y \notin S$. Entonces existe un hiperplano H que separa fuertemente a y de S.

Corolario 2: Sea $S \subset E^n$ un conjunto convexo y cerrado. Entonces S es la intersección de todos los semiespacios que contienen a S.

Prueba: Obviamente S está en la intersección de todos los semiespacios que lo contienen. Para ver que dicha intersección es S, supóngase que $\exists\, y \notin S$ pero que está en la intersección. Entonces $\exists\, H$ que separa fuertemente a y de S y por lo tanto, un semiespacio que contiene a S pero no a y. Esto es una contradicción. ■

Para ilustrar los resultados anteriores, se presenta el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2.4 Considérese el conjunto:

$$S = \{x \mid \|x - z\| \leqslant \alpha\}$$

y sea y tal que $\|y - z\| = \beta > \alpha$ de modo que $y \notin S$. Nótese que el punto

$$\bar{x} = z + \frac{\alpha}{\beta}(y - z)$$

minimiza la distancia entre y y cualquier punto $x \in S$, ya que:

a) $\|\bar{x} - z\| = \alpha \Rightarrow \bar{x} \in S$

b) $(x - \bar{x})^T (\bar{x} - y) \geqslant 0 \quad \forall x \in S.$

Esto se deduce directamente como sigue:

$$(x-\bar{x})^T\ (\bar{x}-y) = [x-z-\frac{\alpha}{\beta}\ (y-z)]^T\ [z+\frac{\alpha}{\beta}\ (y-z)-y]$$
$$= (\frac{\alpha}{\beta}-1)\ [(x-z)^T\ (y-z)-\frac{\alpha}{\beta}\ ||y-z||^2\ ] \geqslant 0$$

Debido a que $(\frac{\alpha}{\beta}-1) < 0$ y a que:

$$\frac{\alpha}{\beta}\ ||y-z||^2 = \alpha\beta$$

En tanto que:

$$(x-z)^T\ (y-z) \leqslant ||x-z|| \cdot ||y-z|| \leqslant \alpha\,\beta \quad \forall\, x \in S$$

Ahora, sea $p = y-z$, considérese el punto

$$x^* = z + \frac{\alpha}{\beta}\ (y-z)$$

y defínase:

$$\theta = p^T x^* = (y-z)^T z + \alpha\,\beta$$

De aquí se obtiene que:

$$p^T y = (y-z)^T\ (y-z+z)$$
$$= ||y-z||^2 + (y-z)^T z$$
$$= (y-z)^T z + \beta^2 > \theta$$

ya que $\beta^2 > \alpha\,\beta$, si $\beta > \alpha > 0$.

Finalmente, se examina $p^T x \quad \forall\, x \in S$, y se obtiene:

$$p^T x = (y-z)^T\ (x-z+z) = (y-z)^T z + (y-z)^T\ (x-z)$$
$$\leqslant (y-z)^T z + ||y-z|| \cdot ||x-z||$$
$$\leqslant (y-z)^T z + \alpha\beta = \theta \quad \forall\, x \in S \ \blacksquare$$

El ejemplo anterior se muestra esquemáticamente en la figura 2.7.

Con base en lo anterior se puede demostrar uno de los resultados más importantes para la teoría de optimización; el teorema de Farkas. Este teorema es esencial en la derivación de condiciones de optimalidad para problemas de programación no-lineal. Forma parte de un conjunto de teoremas llamado "de alternativa" y es sin duda el más importante.

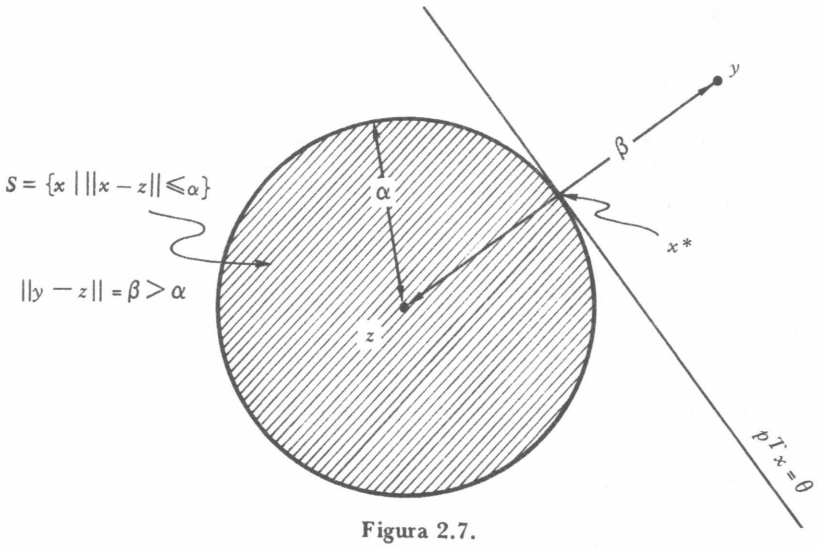


Figura 2.7.

Teorema 2.7 (Farkas) Sea A una matriz $(m \times n)$ y c un vector de dimensión n. Entonces, uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:

1) $Ax \leqslant 0; c^T x > 0$ para alguna $x \in E^n$
2) $A^T y = c; y \geqslant 0$ para alguna $y \in E^m$

Prueba:

i) Supóngase que el sistema 2 tiene una solución $y \geqslant 0$, tal que

$$y^T A = c^T$$

y sea x, tal que $Ax \leqslant 0$. Entonces:

$$c^T x = y^T Ax \leqslant 0 \text{ ya que } y \geqslant 0$$

Por lo tanto, 1) no tiene solución.

ii) Ahora, supóngase que el sistema 2 no tiene solución. Defínase el siguiente conjunto:

$$S \equiv \{x | x = A^T y; y \geqslant 0\}$$

Nótese que S es convexo y cerrado.

Como 2 no tiene solución, $c \notin S$. Por lo tanto, $\exists p \in E^n$ y $\alpha \in \Re$, tales que:

$$p^T c > \alpha \quad \text{y} \quad p^T x \leqslant \alpha \quad \forall x \in S.$$

Nótese que $0 \in S$ ya que $0 \geqslant 0$ y $A^T 0 = 0 \in S$. Por lo tanto $\alpha \geqslant p^T 0 = 0$, lo cual significa que $p^T c > 0$.

Además, $\alpha \geqslant p^T x = p^T (A^T y) = y^T Ap \quad \forall\, y \geqslant 0$.

Ahora bien, como y puede ser tan grande como se desee, dicha desigualdad sólo podrá cumplirse si $Ap \leqslant 0$. Pero esto significa que se ha logrado construir un vector $p \in E^n$, tal que

$$Ap \leqslant 0; c^T p > 0$$

y por lo tanto, p es una solución del sistema 1. ■

Corolario 1: Sean $A(m \times n)$ y $c \in E^n$. Entonces, uno y sólo uno de los siguientes sistemas tiene solución:

1. $Ax \leqslant 0; x \geqslant 0; c^T x > 0$ para alguna $x \in E^n$
2. $A^T y \geqslant c$; y $\geqslant 0$ para alguna $y \in E^m$

Prueba: Hágase $A = [A, -\mathrm{I}]$ y aplíquese el teorema de Farkas. ■

Corolario 2: Sean $A(m \times n); B(k \times n)$ y $c \in E^n$

Entonces, uno y sólo uno de los sistemas siguientes tiene solución:

1. $Ax \leqslant 0, Bx = 0, c^T x > 0$ para alguna $x \in E^n$
2. $A^T y + B^T z = c, y \geqslant 0$ para alguna $y \in E^m; z \in E^k$

Prueba: Del teorema de Farkas, reemplazando A^T por $[A^T, B^T, -B^T]$. ■

El teorema de Farkas tiene una interpretación geométrica, que se puede observar en la figura 2.8. Así, sean $A_1, A_2, \ldots, A_m$ las filas de la matriz A. Entonces, el sistema 2) tiene solución si el vector c está en el cono convexo generado por las filas de A; esto se ilustra en la figura 2.8*a*. Por contra, el sistema 1) tiene solución si el cono convexo cerrado $\{x | Ax \leqslant 0\}$ y el semiespacio abierto $\{x | c^T x > 0\}$ tienen una intersección no-vacía, lo cual sólo puede suceder si c no está en el cono generado por las filas de A.

Esta sección se concluye con dos teoremas de alternativas que se derivan del de Farkas y que serán de utilidad en el capítulo 6 que trata sobre dualidad en teoría de optimización. En primer término se presenta el teorema de "transposición" propuesto por Motzkin; a saber:

Teorema 2.8: Sean B, C y D matrices $(m \times m)$ tales que B no es *vacua* (es decir, tiene cuando menos un elemento). Entonces, o el sistema

I. $Bx > 0; Cx \geqslant 0; Dx = 0$

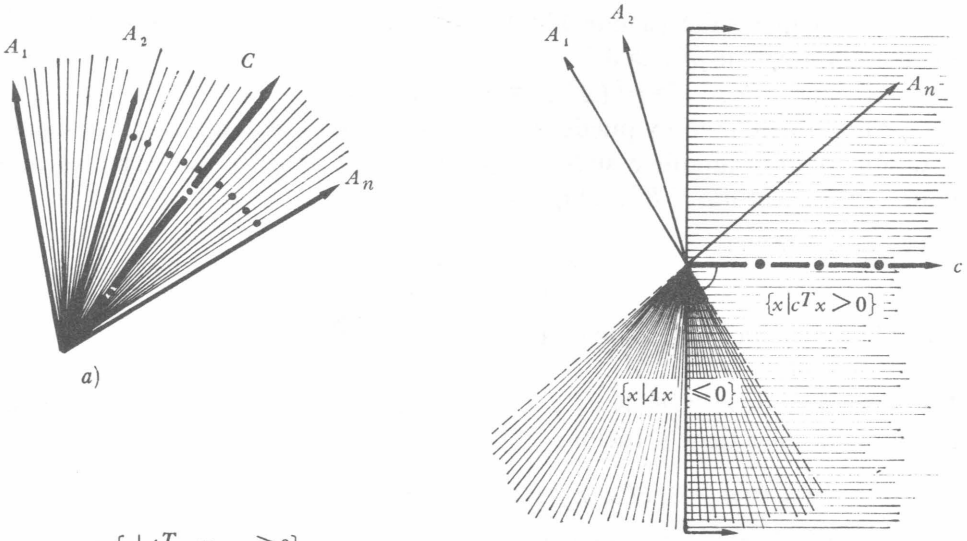


Figura 2.8 El teorema de Farkas.

tiene una solución x; o el sistema

$$\text{II.}\quad B^T u + C^T v + D^T w = 0$$

tiene una solución con $u \geqslant 0;\ u \neq 0;\ v \geqslant 0$, pero no ambos.

Prueba:

i) En primer término se probará que cuando el sistema I tiene solución, el sistema II no puede tenerla.
Así, si I tiene una solución x, entonces el sistema $u^T Bx > 0$; $Cx \geqslant 0$; $Dx = 0$; $u > 0$, también tiene una solución. Nótese que el sistema $Dx = 0$ se puede representar con dos sistemas de desigualdades; a saber $Dx \leqslant 0$; $Dx \geqslant 0$, con lo cual lo anterior dice que el sistema:

$$-Cx \leqslant 0;\ Dx \leqslant 0;\ -Dx \leqslant 0;\ u^T Bx > 0$$

tiene una solución. Defínanse la matríz A y el vector b de la manera siguiente:

$$A \equiv \begin{bmatrix} -C \\ D \\ -D \end{bmatrix};\quad b = B^T u$$

Entonces, lo anterior equivale a decir que el sistema

$$Ax \leqslant 0; b^T x > 0$$

tiene una solución. Entonces, el teorema de Farkas dice que el sistema:

$$A^T y = b$$

no puede tener una solución $y \geqslant 0$. De acuerdo a la definición de A y de b, y haciendo que $y^T = [v^T, p^T, q^T]$, lo anterior significa que el sistema:

$$-C^T v + D^T p - D^T q = -C^T v - D^T (q - p) = B^T u$$

no tiene solución. Así, haciendo $w = q - p$ se tiene que

$$B^T u + C^T v + D^T w = 0$$

no tiene solución, como se quería demostrar.

ii) Ahora, para demostrar la segunda parte del teorema se probará que si I no tiene solución, entonces II sí la tiene. Para esto, nótese que la negación de I implica que $Bx \leqslant 0$ para cualquier x tal que $Cx \geqslant 0$; $Dx = 0$. Entonces, si $u \geqslant 0$ se tiene que:

$$u^T Bx \leqslant 0 \text{ para cualquier } x \text{ tal que } Cx \geqslant 0; Dx = 0.$$

Esto equivale a decir que el sistema

$$u^T Bx > 0; Cx \geqslant 0; Dx = 0$$

no tiene solución. Entonces, usando un argumento semejante al del punto anterior, el teorema de Farkas dice que el sistema

$$B^T u + C^T v + D^T w = 0$$

tiene solución. ■

El teorema siguiente se atribuye a David Gale.

Teorema 2.9: Dada una matriz A $(p \times n)$ y un vector $c \in E^p$, o el sistema

I. $Ax \leqslant c$ tiene una solución $x \in E^n$, ó
II. $A^T y = 0; c^T y = -1; y \geqslant 0$ tiene una solución $y \in E^p$; pero nunca ambos.

Prueba: El sistema I equivale al sistema:

$$\text{I}')\ \alpha > 0,\ \alpha c - Ax \geqslant 0 \text{ con } \alpha \in \mathcal{R};\ x \in E^n.$$

Entonces, del teorema de Motzkin o I′ tiene solución, o la tiene el sistema

$$\text{II}')\ \begin{aligned} &\beta + c^T u = 0 \\ &-A^T u = 0 \end{aligned}$$

$$\text{con } \beta \geqslant 0;\ u \geqslant 0;\ \beta \in \mathcal{R};\ u \in E^p$$

pero no ambos. Entonces, haciendo

$$y = \frac{u}{\beta}$$

se obtiene II de II′ y el resultado es inmediato. ■

2.4.4 Soporte de conjuntos convexos en puntos de frontera

Hasta el momento se ha establecido la separación entre un conjunto convexo cerrado y puntos y que no están en él. Si S es abierto o no es cerrado, entonces pueden suceder dos cosas; a saber:

a) $y \notin \tilde{S}$ (la cerradura de S), en cuyo caso el mismo teorema aplica;
b) y sí está en la cerradura.

Se verá a continuación que en este último caso, un conjunto convexo tiene un hiperplano de *soporte* en cada punto sobre la frontera. Nótese que el teorema 2.10 no distingue entre conjuntos abiertos y cerrados, en cuyo caso y puede estar además en S.

Definición: Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto en E^n, y $\bar{x}$ un punto en la frontera de S. Se dice que el hiperplano $H = \{x | p^T (x - \bar{x}) = 0\}$ *soporta* a S en $\bar{x}$ si

$$\text{ó} \quad \begin{aligned} &i)\ S \subset H^+ \\ &ii)\ S \subset H^- \end{aligned}$$

Si además, $S \not\subset H$, se dice que el hiperplano soporta "bien" a S en $\bar{x}$.

Teorema 2.10: Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo en E^n, y $\bar{x}$ un punto sobre la frontera de S. Entonces, $\exists\, p \neq 0$ tal que $H = \{x | p^T (x - \bar{x}) = 0\}$ soporta a S en $\bar{x}$.

Prueba: Hay que demostrar que p existe, y es tal que $p^T (x - \bar{x}) \leqslant 0\ \forall\ x \in \tilde{S}$.

Sea $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión que no está en la cerradura de S, y tal que $y^k \to \overline{x}$, cuando $k \to \infty$.

Entonces, del teorema 2.6, $\forall\ y^k$ en la sucesión, $\exists\, p^k \neq 0$, tal que

$$(p^k)^T y^k > (p^k)^T x \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots$$

y para toda x en la cerradura de S.

Sea $\overline{p}^k = \dfrac{p^k}{\|p^k\|}$. Entonces, $\|\overline{p}^k\| = 1 \quad \forall\, k$.

Por lo tanto $\overline{p}^k \in P$, donde P es un conjunto cerrado y acotado que pertenece a E^n. Entonces P es *compacto* y por lo tanto $\exists K$ tal que

$$\overline{p}^k \to \overline{p} \text{ cuando } k \to \infty;\ k \in K$$

Además, como $\|\overline{p}^k\| = 1\ \forall\, k$; $\|\overline{p}\| = 1$, y también se satisface la relación:

$$(\overline{p}^k)^T y^k > (\overline{p}^k)^T x \quad \forall\, k \in K$$

y para toda x en la cerradura de S.

Entonces, tomando el límite cuando $k \to \infty$ en K se tiene que:

$$\overline{p}^T \overline{x} \geqslant \overline{p}^T x \quad \forall\, x \text{ en la cerradura de } S. \blacksquare$$

Corolario: Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo en E^n y $\overline{x} \notin S$. Entonces $\exists\ p \neq 0$ en E^n tal que:

$$p^T (x - \overline{x}) \leqslant 0$$

para toda x en la cerradura de S.

Prueba: Si $\overline{x}$ no está en la cerradura de S, entonces se tiene el resultado por el teorema 2.6. Si $\overline{x}$ está en la frontera de S, se tiene el caso presentado en el teorema anterior. $\blacksquare$

2.4.5 Separación de dos conjuntos convexos y el teorema de Gordan

Teorema 2.11: Sean S_1 y $S_2 \neq \emptyset$, dos conjuntos convexos en E^n tales que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Entonces, $\exists H$ que separa a S_1 de S_2; es decir, $\exists\, p \in E^n$ tal que

$$\sup \{p^T x | x \in S_1\} \leqslant \inf \{p^T x | x \in S_2\}$$

Prueba: Defínase el conjunto

$$S = S_1 - S_2 = \{x = x^1 - x^2 | x^1 \in S_1;\ x^2 \in S_2\}$$

Nótese que S es un conjunto convexo. Además, como $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ se tiene que $0 \notin S$. Por el corolario del teorema anterior, $\exists\, p \in E^n$ tal que $p^T(x - \overline{x}) = p^T(x - 0) = p^T x \leqslant 0 \;\; \forall\; x$ en la cerradura de S.

Por lo tanto:

$$p^T x = p^T(x^1 - x^2) \leqslant 0 \quad \forall\, x^1 \in S_1 \text{ y } x^2 \in S_2$$

Es decir:

$$p^T x^1 \leqslant p^T x^2 \quad \forall\, x_1 \in S_1 \text{ y } x^2 \in S_2 \blacksquare$$

Este capítulo concluye con otro teorema de alternativa muy importante, atribuido a Gordan.

Teorema 2.12 (Gordan) Sea A una matriz $(m \times n)$. Uno y sólo uno de los sistemas siguientes tiene solución:

I. $Ax < 0$ para alguna $x \in E^n$
II. $p^T A = 0^T;\ p \geqslant 0$ para algún $p \neq 0$ en E^m.

Prueba:

a) Supóngase que I tiene una solución $\overline{x}$.

Tómese $p \geqslant 0; p \neq 0$. Entonces, se tiene que no todos los elementos de p son cero, sino que algunos de sus elementos son positivos. Por lo tanto:

$$\overline{p}^T A\overline{x} < 0$$

Lo que implica $p^T A \neq 0^T$ y que II no tiene solución.

b) Ahora, supóngase que I no tiene solución y defínanse los siguientes conjuntos:

$$S_1 = \{z | z = Ax,\ x \in E^n\}$$
$$S_2 = \{z | z < 0\}$$

Nótese que S_1 y S_2 son conjuntos convexos.
Como I no tiene solución,

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset$$

Entonces, del teorema 2.11 existe un hiperplano que separa a ambos conjuntos. Es decir, $\exists\, \overline{p} \in E^m$ tal que $\overline{p} \neq 0$ y,

$$\begin{aligned} & \overline{p}^T z^1 \geqslant \overline{p}^T z^2 \quad \forall\, z^1 \in S_1 \text{ y } z^2 \in \tilde{S}^2 \\ \text{i.e.} \quad & \overline{p}^T Ax \geqslant \overline{p}^T z \quad \forall\, x \in E^n \text{ y } z \in \tilde{S}^2 \end{aligned}$$

Como z puede ser tan negativa como se desee, es necesario que $\overline{p} \geqslant 0$ para que se mantenga la desigualdad.

Además $z = 0$ está en la cerradura de S_2. Por lo tanto,

$$\overline{p}^T Ax \geqslant 0 \quad \forall\, x \in E^n$$

Entonces, sea $\overline{x}^T = -A^T \overline{p}$. Con esto se tiene

$$\overline{p}^T A\overline{x} = (\overline{p}^T A)^T\, (-\overline{p}^T A) = -\,||\overline{p}^T A||^2 \geqslant 0$$

pero esto sólo puede ser cierto si $\overline{p}^T A = 0$. ■

2.5 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Aquí concluye esta brevísima introducción al estudio de los conjuntos convexos. El tema es muy importante en matemáticas en general, ya que la propiedad de convexidad es altamente deseable, indicando de alguna manera, el "buen comportamiento" de un conjunto. Como se explicó en este capítulo, la propiedad de convexidad hace que prácticamente todo lo que se desee que suceda, de hecho sucede.

En particular, se ha buscado la forma más rápida de llegar a los teoremas de separación y soporte, que son a su vez fundamentales para poder probar teoremas de alternativas. Como se verá en el capítulo 5, éstos permiten transformar condiciones geométricas de optimalidad, en condiciones más manejables de caracterización de puntos óptimos para propósitos de aplicación.

Sin embargo, no se ha hecho ningún énfasis en cierto tipo de conjuntos convexos especiales, como los poliedros o los conos polares, que tienen propiedades interesantes para cierto tipo de problemas de optimización. Por ejemplo, se demuestra que cualquier punto de un poliedro convexo puede ser representado por medio de una combinación convexa de sus "puntos extremos" más una combinación lineal no-negativa de sus "direcciones extremas". Este teorema, llamado de "representación" es fundamental para el problema de programación lineal y el desarrollo del método simplex.[3] El lector interesado en profundizar en el tema queda referido al libro clásico de Rockafellar[39] o al texto más reciente de Lay.[27]

EJERCICIOS CAPITULO 2

1. Demuestre o dé un contraejemplo: si C_1, C_2 son conjuntos convexos, entonces $C = C_1 \cup C_2$ también lo es.
2. Si C_i son conjuntos convexos $i = 1, 2, \ldots, \infty$; entonces $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ también lo es.
3. Demuestre que si C es un conjunto convexo entonces, dados $x_1, x_2, \ldots, x_k \in C$, se tiene que: $x = \Sigma \lambda_i x_i \in C$ para $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$ tales que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. (Sugerencia: pruebe este lema por inducción).
4. ¿Cuáles de los conjuntos siguientes son convexos?

   a) $C_1 = \{x | x^T x \leqslant 1\} \subset E^n$
   b) $C_2 = \{x | e^{-x^t x} \geqslant \gamma\} \subset E^n$
   c) $C_3 = \{x | Ax = b\}$
   d) $C_4 = \{(x_1, x_2) \geqslant 0 | x_1 + x_2 \leqslant 1; 3x_1 + x_2 \geqslant 1\}$
   e) $C_5 = \{(x_1, x_2) \geqslant 0 | x_1 + x_2 \leqslant 1; x_1 + \frac{1}{3} x_2 \geqslant 1\}$
   f) $C_6 = \{(x_1, x_2) \geqslant 0 | x_1 + x_2 \leqslant 1 \text{ si } x_1 \leqslant 1 \text{ y } x_1 - x_2 \geqslant 1 \text{ si } x_1 > 1\}$.

5. Diga cuáles de los conjuntos siguientes son convexos. Si el conjunto es convexo demuéstrelo, de lo contrario dé un contraejemplo explícito.

$$S_1 = \{x | \, ||x|| \leqslant \alpha; \alpha > 0\} \subset E^n$$
$$S_2 = \{x | \beta \leqslant ||x|| \leqslant \alpha; 0 < \beta < \alpha\} \subset E^n$$
$$S_3 = \{x | q^T x + \tfrac{1}{2} x^T Q x \leqslant \gamma\} \subset E^n$$

   donde Q es tal que $x^T Q x \leqslant 0 \quad \forall x \in E^n$.

6. Sean:

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x^4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   puntos en E^2.

   a) Describa el poliedro que definen como un conjunto del tipo:

$$S = \{x | Ax \leqslant b\} \subset E^2$$

   b) ¿Qué vector se define con Ax^i; $i = 1, 2, 3, 4$?
   c) ¿Cuál de los puntos siguientes está en S?

$$y^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad y^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Exprese aquellos puntos del inciso anterior que están en S, como una combinación convexa de x^1, x^2, x^3 y x^4.

7. *a*) Encuentre la distancia mínima entre el punto $p = \gamma \mathbf{1}$ y el conjunto $S = \{x | x^T x \leqslant 1\}$ donde:

$$\gamma > \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Repita el ejercicio anterior para cualquier $p \in E^n$ y el conjunto

$$S_\alpha = \{x | x^T x \leqslant \alpha\}$$

donde $p \notin S_\alpha$.

8. Sean:

$$S_1 = \{x | x^T x \leqslant 1\}$$

$$S_2 = \{x | (x - p)^T (x - p) \leqslant 1; \|p\| > 2\}$$

a) Demuestre que S_1 y S_2 son conjuntos convexos.
b) Demuestre que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.
c) Encuentre un hiperplano que separa a S_1 de S_2.

9. Demuestre o dé un contraejemplo:

a) Si $S \subset E^n$ es un conjunto convexo, entonces su complemento $\overline{S}$ no es convexo.
b) Sea $S \subset E^n$ un conjunto convexo y A una matriz de "m" filas y "n" columnas. Entonces, el conjunto

$$C = \{x | x = Ay; y \in S\} \subset E^m$$

es convexo.

10. Se dice que un conjunto C es *fuertemente convexo* si $\forall\, x, y \in C\ x \neq y$; $\lambda \in (0, 1)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\lambda x + (1 - \lambda)y, \epsilon) \subset C$. Diga cuál de los conjuntos siguientes es fuertemente convexo:

a) $\{x | Ax = b\}$ donde A es $(m \times n)$; $x \in E^n$; $b \in E^m$.

b) $\{x | x^T x \leqslant \alpha\}$; $\alpha \in \mathcal{R}$; $\alpha > 0$

11. Sean $S = \{x | x^T x < 1\} \subset E^2$; $y = (2, 2)$. Entonces,

    a) El punto en S que minimiza la distancia entre "y" y cualquier $x \in S$, viene dado por:

    $$\overline{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{1} \quad \text{¿Falso o verdadero?}$$

    b) El hiperplano $H(x) = \{x | \mathbf{1}^T x = \sqrt{2} + \epsilon\} \subset E^2$ separa a "y" de S:

    i) estrictamente, si $\epsilon \in (0, \sqrt{2})$
    ii) fuertemente, si $\epsilon \in (0, \sqrt{2})$
    iii) ambas respuestas son ciertas
    iv) nada de lo anterior es cierto.

12. ¿Es cierto que el teorema de Farkas implica que si dada una matriz $A(m \times n)$ y un vector $c \in E^n$, existe $y \in E^m$, tal que $A^T y = c$; $y \geqslant 0$, entonces $c^T x \leqslant 0$ para cualquier $x \in E^n$ tal que $Ax \leqslant 0$?
13. Supóngase que el problema

    $$\begin{aligned} &\text{máx } c^T x \\ &\text{S.a. } Ax \leqslant 0 \\ &\quad\ \ ||x|| \leqslant 1 \end{aligned}$$

    tiene una solución x^* tal que $c^T x^* > 0$. Esto significa que el problema

    $$\begin{aligned} &\text{máx } \eta \\ &\text{S.a. } y^T A = c \\ &\qquad\ \ y \geqslant \eta\ \mathbf{1}; \end{aligned}$$

    tiene una solución:

    a) $\eta^* \leqslant 0$
    b) $\eta^* > 0$
    c) indeterminada.

14. Diga si la afirmación siguiente es falsa, verdadera o incierta: Si para una matriz $A(m \times n)$ existe $x \in E^n$ tal que $Ax > 0$, entonces los conjuntos

    $$\begin{aligned} S_1 &= \{z | z = Ax; x \in E^n\} \\ S_2 &= \{z | z < 0\} \end{aligned}$$

    tienen intersección vacía.
15. Sea C un conjunto cerrado. Entonces, el casco convexo de C, denotado por $H(C)$ es necesariamente cerrado. ¿Falso, verdadero o incierto?

16. Sean C y D dos conjuntos no vacíos. Demuestre o dé un contraejemplo:

    a) $H(C \cap D) \subset H(C) \cap H(D)$

    b) $H(C \cap D) = H(C) \cap H(D)$

17. Sea $P \subset E^n$ un poliedro. Demuestre que P es un conjunto convexo, cerrado y acotado.

18. Sean C y D conjuntos convexos cerrados. Demuestre o pruebe lo contrario.

    a) $C + D$ es un conjunto cerrado.
    b) Una condición suficiente para que lo anterior sea cierto es que alguno de los dos conjuntos sea compacto.

19. Sean $C, D \subset E^n$ conjuntos convexos. Demuestre que existe un hiperplano H que separa fuertemente a C de D, si y sólo si se cumple la condición siguiente:

$$\inf \{\|x - y\| \mid x \in C;\ y \in D\} > 0$$

20. Sean:

$$S_1 = \{(x, y) \in E^2 \mid y \geqslant \frac{1}{x};\ x > 0\}$$
$$S_2 = \{(x, y) \in E^2 \mid y \leqslant -\frac{1}{x};\ x > 0\}$$

    Entonces diga usted si

    a) Existe un hiperplano que los separa.
    b) El hiperplano los separa estrictamente.
    c) El hiperplano los separa fuertemente.
    d) Todo lo anterior es cierto.
    e) Nada es cierto.

21. *a*) Demuestre que si S_1, S_2 son conjuntos convexos y compactos con $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, entonces existe un hiperplano que los separa fuertemente.
    b) Demuestre que es suficiente con que uno de los dos sea compacto.

22. Sean C y D conjuntos convexos no vacíos tales que $C \cap D \neq \emptyset$. Demuestre que existen p, q, tales que:

$$p^T x + q^T y \geqslant 0 \quad \forall\, x \in C; y \in D$$

3 *Funciones convexas*

INTRODUCCION

El capítulo anterior se dedicó a estudiar conjuntos convexos y algunas de sus propiedades. En éste, se estudian funciones convexas. Los orígenes históricos de la convexidad de funciones se remontan a las épocas de Hölder, Hadamard y Jensen, a fines del siglo pasado y principios de éste. Desde entonces se reconoció que el tema era importante para problemas de optimización, ya que las propiedades de convexidad de una función condicionan en gran medida lo que pueda decirse de los puntos donde ésta tenga máximos o mínimos.

Lo anterior no sólo se refiere a la función que se pretenda optimizar, sino también al conjunto de puntos de entre los cuales se debe buscar la solución. Esto se debe a que, en un programa matemático, el conjunto de "soluciones factibles" se representa por medio de un conjunto de desigualdades y ecuaciones que deben satisfacerse en forma simultánea. Así, de las propiedades de convexidad que posean las funciones que definen las desigualdades y ecuaciones, dependerá el que el conjunto de soluciones factibles sea o no convexo. Esto también condiciona el tipo de soluciones que pueda tener un problema de optimización.

En este capítulo se estudian las principales propiedades de las funciones convexas y formas alternativas de caracterizarlas. Además de estudiar las que son diferenciables, se introduce el concepto de subgradiente para aquellas que no lo son. Con esto se logra una generalización muy interesante de los principales resultados sobre máximos y mínimos de funciones convexas, que son los resultados más relevantes del capítulo, para los propósitos del tema central de este texto.

3.1 FUNCIONES CONVEXAS: DEFINICION Y PROPIEDADES BASICAS

La definición de convexidad de una función es objeto de la aceptación de una convención, de la misma manera que pudiera serlo la definición de la dirección norte-sur. Es curioso ver en algunos textos más antiguos cómo, lo que ahora se ha convenido casi universalmente como convexidad, era definido como "concavidad" y viceversa. Actualmente en general se acepta la siguiente definición:

Definición: Sea $f: S \to \mathcal{R}$ una función definida sobre un conjunto convexo $S \subset E^n$. Entonces, se dice que f es una *función convexa*, si dados $x, y \in S$ se tiene que:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

para cualquier $\lambda \in [0, 1]$.

Se dice que *f es cóncava*, si $-f$ es una función convexa.

Si la desigualdad se cumple estrictamente para $\lambda \in (0, 1)$, entonces la función es *estrictamente convexa;* es decir:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\, y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall\, x \neq y$$

Gráficamente, el concepto de convexidad de una función se representa en la figura 3.1. La noción tiene una generalización simple que se demuestra a continuación:

Lema 3.1. Sea f una función convexa definida sobre un conjunto convexo $S \subset E^n$. Entonces, dados $x^1, x^2, \ldots, x^k \in S$ y $\lambda_i \geqslant 0$ para $i = 1, 2, \ldots k$, tales que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, se tiene que

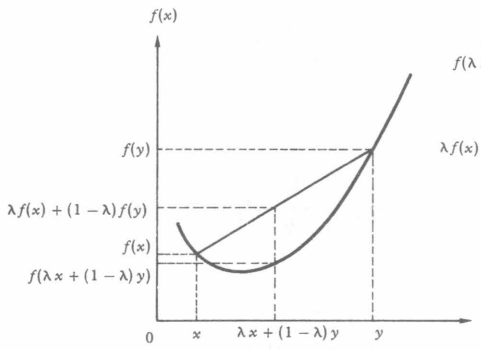
$$f\left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_i\, x^i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, f(x^i)$$

Prueba: Por inducción. Se sabe que la proposición es cierta para $k = 2$, por definición de f. Entonces, supóngase cierto para k y demuéstrese para $k + 1$.

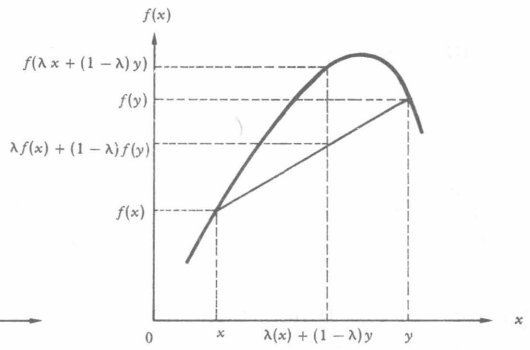
Sean $\lambda_i \geqslant 0; i = 1, 2, \ldots, k+1$ tales que $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$. Nótese que el único caso interesante es cuando $\lambda_i \neq 0 \quad \forall\, i$.

Ahora, considérese:

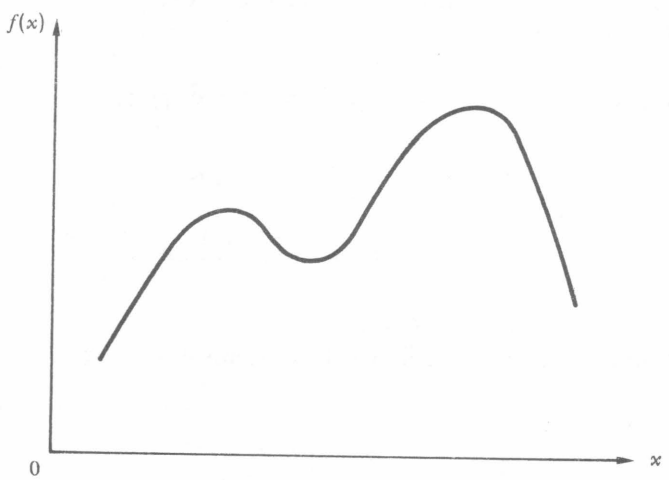
$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i\, x^i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{h} \lambda_i\, x^i + \lambda_{k+1}\, x^{k+1}\right)$$



a) Una función convexa



b) Una función cóncava



c) Una función que no es cóncava ni convexa

Figura 3.1.

sea $\theta = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i > 0$ de modo que:

i) $\lambda_{k+1} = (1-\theta)$

ii) $\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

iii) $\theta < 1$.

Entonces,

$$f(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x^i) = f(\theta \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\theta} x^i + (1-\theta) x^{k+1}) \leqslant \theta f(\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\theta} x^i) + (1-\theta) f(x^{k+1})$$

ya que f es una función convexa.

Además, por la hipótesis de inducción, se tiene que:

$$f(\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\theta} x^i) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\theta} f(x^i)$$

y el resultado es obvio. ■

Una propiedad muy importante de cualquier función convexa es que tiene que estar acotada, en una vecindad de cualquier punto en el interior de su dominio. Esto se demuestra a continuación.

Teorema 3.2: Sea $f: S \to \mathcal{R}$ una función convexa definida sobre un conjunto convexo no-vacío $S \subset E^n$. Entonces dado $\bar{x} \in \overset{\circ}{S}$, existen $\epsilon > 0$ y $M > 0$, tal que $f(x) \leqslant M \quad \forall\, x \in B(\bar{x}, \epsilon)$.

Prueba: Como $\bar{x} \in \overset{\circ}{S}$, $\exists\, \epsilon' > 0$ tal que $B(\bar{x}, \epsilon') \subset \overset{\circ}{S}$. Defínanse los puntos:

$$x_i = \begin{cases} \bar{x} + \epsilon' e_i & i = 1, 2, \ldots, n \\ \\ \bar{x} - \epsilon' e_{i-n} & i = n+1, \ldots, 2n \end{cases}$$

y sea $\chi = \{x_i\}_{i=1}^{2n}$ de modo que $\chi \subset \overset{\circ}{S}$.

Sea $M = \max_i f(x_i)$. Del lema 3.1. se tiene que se cumple la relación siguiente:

$$f(\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i f(x_i) \leqslant M$$

para cualquier conjunto $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{2n}$ tal que $\lambda_i \geqslant 0\ \forall_i$ y $\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i = 1$. Esto significa que $f(x) \leqslant M$ para cualquier $x \in H(\chi)$ y sólo falta demostrar que existe

una vecindad de $\bar{x}$ contenida en $H(\chi) \subset \overset{\circ}{S}$. Pero esto, aunque un poco laborioso, es evidente. Por ejemplo, sean

$$\epsilon = \frac{\epsilon'}{n} \; ; y \in B(\bar{x}, \epsilon) \; ; z = y - \bar{x}$$

se tiene que demostrar que $x \in H(\chi)$. Defínanse

$$\lambda_i = \begin{cases} z_i/\epsilon' & \text{si } z_i \geqslant 0 \\ 0 \text{ de lo contrario} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\lambda_{n+i} = \begin{cases} -z_i/\epsilon' & \text{si } z_i < 0 \\ 0 \text{ de lo contrario} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\lambda_{2n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i$$

Obviamente se tiene que $\lambda_i \geqslant 0$ para $i = 1, 2, \ldots 2n$. Además, como $\|z\| < \epsilon$, se tiene que $|z_i| < \epsilon'/n \quad \forall_i$ y

$$\lambda_{2n+1} = 1 - \sum_{i=1}^{2n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{z_i}{\epsilon'} \right| \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \geqslant 0$$

de donde se deduce que $\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i = 1$. Con esto, finalmente se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i x_i + \lambda_{2n+1} \bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{zi}{\epsilon'} \; e_i = \bar{x} + z = x$$

de donde $x \in H(\chi)$ y por lo tanto $f(x) \leqslant M$. ■

3.2 EL EPIGRAFO Y EL HIPOGRAFO DE UNA FUNCION CONVEXA

A continuación se introduce el concepto del Epígrafo y del Hipógrafo de una función, y se estudian sus características cuando la función es convexa. Posteriormente este resultado servirá para probar varias propiedades importantes de las funciones convexas y llegar de manera natural a la noción del "subgradiente".

Una función f: $S \to \mathcal{R}$ puede quedar descrita totalmente por su "gráfica" que es el conjunto:

$$G = \{[x, f(x)] \mid x \in S\} \subset E^{n+1}$$

Relacionados con la gráfica de la función, hay dos conjuntos:

a) *El Epígrafo:*

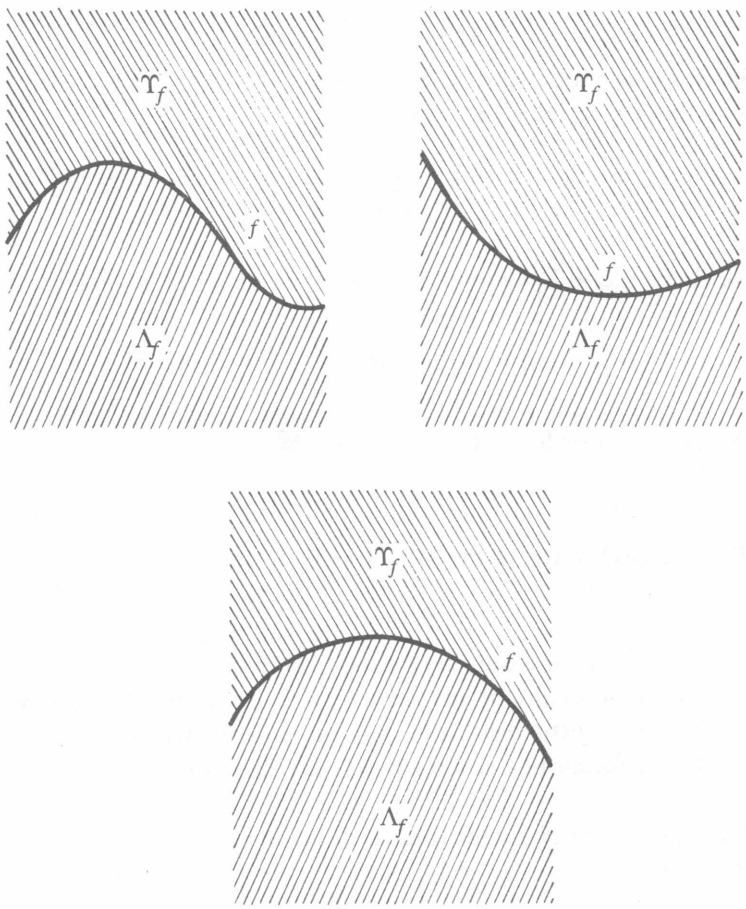
$$\Upsilon_f = \{(x, \gamma) \mid x \in S\ ; \gamma \in \mathcal{R};\quad f(x) \leqslant \gamma\}$$

b) *El Hipógrafo:*

$$\Lambda_f = \{(x, \gamma) \mid x \in S\ ; \gamma \in \mathcal{R};\quad f(x) \geqslant \gamma\}$$

Se puede pensar en el epígrafo como el conjunto de puntos que están "por encima" de la gráfica de f, y el hipógrafo como los que están "por debajo". Estos conceptos se ilustran en la figura 3.2.

Estas nociones conducen a una caracterización muy importante de las funciones convexas.



Teorema 3.3: Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo en E^n y f: $S \to \mathcal{R}$. Entonces, f es una función convexa si y sólo si su epígrafo es un conjunto convexo.

Prueba:

i) f convexa $\Rightarrow \Upsilon_f$ convexo.

Supóngase que f es convexa y sean $(x, \gamma_1), (y, \gamma_2) \in \Upsilon_f$.
Se debe demostrar que:

$$\lambda(x, \gamma_1) + (1 - \lambda)(y, \gamma_2) \in \Upsilon_f \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Como $(x, \gamma_1), (y, \gamma_2) \in \Upsilon_f$, se tiene que:

$$f(x) \leqslant \gamma_1 \text{ y } f(y) \leqslant \gamma_2. \text{ Sea } \lambda \in [0, 1]. \text{ Entonces:}$$

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \leqslant \lambda \gamma_1 + (1 - \lambda) \gamma_2$$

Pero, como f es convexa; a su vez se tiene que:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \leqslant \lambda \gamma_1 + (1 - \lambda) \gamma_2$$

Pero S es un conjunto convexo y por lo tanto,

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in S$$

y lo anterior implica que

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2) \in \Upsilon_f \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

lo cual, a su vez, implica que Υ_f es un conjunto convexo.

ii) Υ_f convexo $\Rightarrow f$ convexa

Supóngase que Υ_f es convexo y sean $x, y \in S$ y $\gamma_1 = f(x)$; $\gamma_2 = f(y)$. Entonces:

$$f(x) \leqslant \gamma_1 \quad \text{y} \quad f(y) \leqslant \gamma_2$$

y por lo tanto,

$$[x, f(x)] \; ; [y, f(y)] \in \Upsilon_f$$

entonces:

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y,\ \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)\} \in \Upsilon_f \quad \forall\, \lambda \in [0, 1]$$

porque es convexo y esto, por definición implica que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall\, \lambda \in [0, 1]$$

lo cual significa que f es una función convexa. ■

Igualmente se puede demostrar que el hipógrafo de una función cóncava es un conjunto convexo.

Un corolario importante del teorema anterior es que se pueden definir conjuntos convexos por medio de desigualdades en las que intervienen funciones convexas.

Corolario 1: Sea f: $S \to \mathcal{R}$ una función convexa definida sobre un conjunto convexo S. Entonces,

$$S_\alpha = \{x \mid f(x) \leqslant \alpha\}$$

es un conjunto convexo para cualquier $\alpha \in \mathcal{R}$.

Corolario 2: Sea f: $S \to \mathcal{R}$ una función convexa definida sobre un conjunto convexo $S \subset E^n$. Entonces $\exists\, p \in E^{n+1}$ con $p_{n+1} \neq 0$, tal que

$$p^T[(x, \gamma) - (\overline{x}, f(\overline{x}))] \leqslant 0 \quad \forall\, (x, \gamma) \in \Upsilon_f \text{ y } \overline{x} \in \overset{\circ}{S}.$$

Prueba: Como $[\overline{x}, f(\overline{x})]$ está en la frontera del epígrafo de f, que es un conjunto convexo, del teorema 2.10 se sabe que existe un hiperplano de soporte para Υ_f en $[\overline{x}, f(\overline{x})]$. Es decir, existe $p \in E^{n+1}$; $p \neq 0$, tal que:

$$p^T\ [(x, \gamma) - (\overline{x}, f(\overline{x}))] \leqslant 0 \quad \forall\, (x, \gamma) \in \Upsilon_f$$

Pártase $p^T = [q^T, p_{n+1}]$ donde $q \in E^n$ y supóngase que $p_{n+1} = 0$. Entonces, $q \neq 0$ y existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que:

$$q_i\,(x_i - \overline{x}_i) \leqslant 0 \text{ con } q_i \neq 0 \qquad \forall\, x \in S.$$

Ahora, como $\overline{x} \in \overset{\circ}{S}$, existe $\epsilon > 0$, tal que

$$q_i(\overline{x}_i + \epsilon - \overline{x}_i) = q_i(\epsilon) \leqslant 0$$

$$q_i(\overline{x}_i - \epsilon - \overline{x}_i) = q_i(-\epsilon) \leqslant 0.$$

Pero esto sólo puede ser cierto si $q_i = 0$, lo cual es una contradicción. ■

Teorema 3.4 Sea $S \subset E^n$ un conjunto convexo no vacío y f: $S \to \mathcal{R}$ una función convexa. Entonces, f es continua en cualquier punto en el interior de S.

Prueba: Tómese $\bar{x} \in \overset{\circ}{S}$ y sea $\{x^k\} \subset S$ tal que $x^k \to \bar{x}$. Hay que demostrar que dado $\epsilon > 0, \exists\ \bar{k}$ tal que $|f(x^k) - f(\bar{x})| < \epsilon \quad \forall\, k \geqslant \bar{k}$.

Nótese que, por el corolario 2 del teorema 3.2, existe

$$p^T = [q^T, p_{n+1}] \in E^{n+1}, \text{ con } p_{n+1} \neq 0.$$

Tal que

$$p^T[(x, \gamma) - (\bar{x}, f(\bar{x}))] \leqslant 0 \quad \forall\, (x, \gamma) \in \Upsilon_f$$

y por lo tanto,

$$p_{n+1}(\gamma - f(\bar{x})) \leqslant 0 \quad \forall\, \gamma, \text{ tal que } (\gamma, x) \in \Upsilon_f.$$

Obviamente, $[x^k, f(x^k)] \in \Upsilon_f \quad \forall\, k$.

Supóngase, sin pérdida de generalidad que $p_{n+1} < 0$. Entonces, lo anterior significa que:

$$f(x^k) \geqslant f(\bar{x}) > f(\bar{x}) - \epsilon \quad \forall\, k.$$

Ahora, tómese $\gamma > f(\bar{x})$. Entonces $(\bar{x}, \gamma) \in \overset{\circ}{\Upsilon}_f$ y por el teorema 3.2 se tiene que existe $\epsilon' > 0$, tal que $B[(\bar{x}, \gamma), \epsilon'] \subset \overset{\circ}{\Upsilon}_f$. Ahora, por el teorema 2.4 $(\bar{x}, \alpha) \in \overset{\circ}{\Upsilon}_f \quad \forall\, \alpha > f(\bar{x})$. Entonces, sea $\alpha \in (f(x), f(\bar{x}) + \epsilon)$, de modo que $(\bar{x}, \alpha) \in \overset{\circ}{\Upsilon}_f$ y existe $\epsilon'' > 0$ tal que $B[(\bar{x}, \alpha); \epsilon''] \subset \overset{\circ}{\Upsilon}_f$. Como $x^k \to \bar{x}$, existe $\bar{\bar{k}}$ tal que $(x^k, \alpha) \in B[(\bar{x}, \alpha); \epsilon''] \quad \forall\, k \geqslant \bar{\bar{k}}$. Pero esto significa

$$f(x^k) \leqslant \alpha < f(\bar{x}) + \epsilon \quad \forall\, k \geqslant \bar{\bar{k}}$$

y el resultado es inmediato. ■

Ejemplo 3.1 Considérese la función f: $[0, 1] \to [0, 1]$, definida según:

$$f(x) = \begin{cases} x^2; & x \in (0, 1] \\ 1; & x = 0 \end{cases}$$

Nótese que f es una función convexa sobre $[0, 1]$ aunque sea discontinua en el origen. Además, obviamente es continua en el interior de su dominio. ■

Esta sección se concluye demostrando un resultado que es un tanto curioso, a la vez que útil, a saber:

Lema 3.5: Sean $f, g: S \to \mathcal{R}$ dos funciones convexas definidas sobre S, convexo. Entonces, la función

$$h(x) = \text{máx } \{f(x), g(x)\}$$

es convexa sobre S.

Prueba: Sean $x, y \in S; \lambda \in [0, 1]$ y $z = \lambda x + (1 - \lambda) y$.

Entonces,

$$h(z) = \text{máx } \{f(z), g(z)\}.$$

Como f y g son funciones convexas, se sabe que:

$$f(z) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

$$g(z) \leqslant \lambda g(x) + (1 - \lambda) g(y)$$

De donde se obtiene que:

$$h(z) \leqslant \text{máx } \{\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y), \lambda g(x) + (1 - \lambda) g(y)\}$$

$$\leqslant \lambda \text{ máx } \{f(x), g(x)\} + (1 - \lambda) \text{ máx } \{f(y), g(y)\}$$

$$= \lambda h(x) + (1 - \lambda) h(y) \blacksquare$$

3.3 LA DERIVADA DIRECCIONAL DE UNA FUNCION Y EL SUBGRADIENTE

El concepto de derivada direccional es el de razón de cambio del valor de la función, en una dirección. Se podría pensar que es una generalización del concepto de derivada parcial.

Definición: Sea $S \subset E^n$ un conjunto no vacío, y sea $f: S \to \mathcal{R}$. Sean $\overline{x} \in S$, y $d \in E^n$ tales que $\exists\ \overline{\lambda}$, para la cual $\overline{x} + \lambda d \in S \quad \forall\ \lambda \in (0, \overline{\lambda})$

Entonces, la derivada direccional de f en $\overline{x}$ sobre la dirección d, se define como:

$$f'(\overline{x}, d) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\overline{x} + \lambda d) - f(\overline{x})}{\lambda}$$

Se puede demostrar fácilmente que cuando f es diferenciable, se tiene que $f'(\bar{x}, d) = \nabla f(\bar{x})^T d$.

Una propiedad importante de las funciones convexas es que la derivada direccional existe en cualquier punto de su dominio y en cualquier dirección. La demostración se deja como un ejercicio para el lector.

Ahora, como el epígrafo de f es un conjunto convexo posee hiperplanos de soporte. Este hecho conduce a una noción que tiene mucha importancia y que es la del *subgradiente.*

Definición: Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo en E^n y sea f: $S \to \mathcal{R}$ una función convexa. Entonces, el vector ξ es un *subgradiente* de f en el punto $\bar{x} \in S$, si

$$f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \xi^T (x - \bar{x}) \quad \forall\, x \in S$$

Proposición 3.6 Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo en E^n y f: $S \to \mathcal{R}$ una función convexa. Entonces para $\bar{x} \in S$ defínase el conjunto de todos los subgradientes de f en $\bar{x}$:

$$\Phi(\bar{x}) = \{\xi \mid f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \xi^T (x - \bar{x}); x \in E^n\}$$

Entonces, $\Phi(\bar{x})$ es un conjunto convexo.

Prueba: Sean $\xi_1, \xi_2 \in \Phi(\bar{x})$. Entonces:

$$\left.\begin{aligned} f(x) - f(\bar{x}) &\geqslant \xi_1^T (x - \bar{x}) \\ f(x) - f(\bar{x}) &\geqslant \xi_2^T (x - \bar{x}) \end{aligned}\right\} \forall\, x \in E^n$$

Tómese $\lambda \in (0, 1)$ y sea $\xi = \lambda\xi_1 + (1 - \lambda)\,\xi_2$

Entonces:

$$[\lambda\xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2]^T (x - \bar{x}) =$$

$$= \lambda\xi_1^T (x - \bar{x}) + (1 - \lambda)\xi_2^T (x - \bar{x}) \leqslant \lambda\,[f(x) - f(\bar{x})] + (1 - \lambda)\,[f(x) - f(\bar{x})] =$$

$$= f(x) - f(\bar{x}) \quad \forall\, x \in E^n \blacksquare$$

De la figura 3.3 se observa que un subgradiente es la proyección en E^n de la normal de un hiperplano de soporte del epígrafo de f en $\bar{x}$.

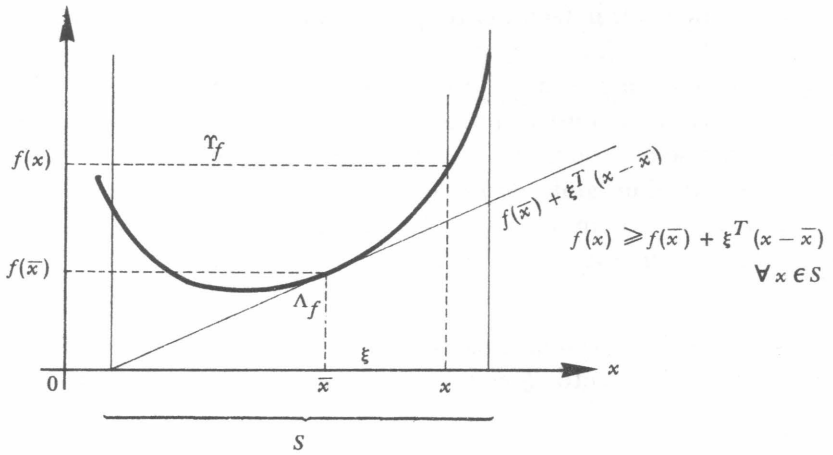


Figura 3.3 Interpretación geométrica del subgradiente.

Ejemplo 3.2: Considérese la función $f:[0, \infty) \to [0, \infty)$ definida según:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x\,; & x \in [0, 1) \\ x^2 - 1\,; & x \geqslant 1 \end{cases}$$

A continuación se encuentran sus subgradientes. Para esto, es necesario considerar tres casos: $x \in [0, 1)$; $x = 1$; $x > 1$. Se deja al lector demostrar que la función es convexa.

a) $x \in (0, 1)$. En este caso, $\xi = \dfrac{df}{dx} = -1$ para cualquier $\bar{x}$ en el intervalo, ya que:

$$f(\bar{x}) + \xi^T (x - \bar{x}) = 1 - \bar{x} - (x - \bar{x}) = 1 - x.$$

Nótese que si $x \in [0, 1)$, entonces

$$f(\bar{x}) + \xi^T (x - \bar{x}) = f(x)$$

con lo cual se satisface la condición. Si por el contrario, $x \geqslant 1$, se tiene que:

$$x^2 - 1 \geqslant 1 - x$$

y por lo tanto, $f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \xi^T (x - \bar{x})$,

con lo cual también se satisface la relación.

b) $\bar{x} > 1$: En este caso, $\xi = \dfrac{df}{d\bar{x}} = 2\bar{x}$, para cualquier $\bar{x} > 1$, ya que:

$$f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}) = \bar{x}^2 - 1 + 2\bar{x}(x - \bar{x})$$

$$= 2x\bar{x} - \bar{x}^2 - 1 + x^2 - x^2$$

$$= -(\bar{x} - x)^2 + x^2 - 1.$$

Entonces, si $x \in [0, 1)$, se tiene que

$$x^2 - 1 - (\bar{x} - x)^2 < 0$$

y por lo tanto,

$$f(x) = 1 - x > f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}).$$

Si por el contrario, $x \geqslant 1$, se tiene:

$$f(x) = x^2 - 1 \geqslant x^2 - 1 - (\bar{x} - x)^2 = f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}),$$

con lo cual se verifica lo deseado.

c) $\bar{x} = 1$: En este caso $\xi \in [-1, 2]$ es un subgradiente. Para ver esto se examina la relación a satisfacer:

$$f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}) = \bar{x}^2 - 1 + \xi^T(x - \bar{x}) = \xi^T(x - 1)$$

Entonces, la condición que se tiene que cumplir, para $x \in [0, 1)$ es:

$$f(x) = 1 - x \geqslant \xi(x - 1)$$

Nótese que $x - 1 < 0$, si $x \in [0, 1)$, por lo tanto, para poder despejar ξ es necesario primero, multiplicar por menos uno, con lo cual se obtiene:

$$\xi \geqslant -1$$

Para $x \geqslant 1$, se debe satisfacer

$$f(x) = x^2 - 1 \geqslant \xi(x - 1)$$

Es decir, $\xi \leqslant \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \quad \forall\, x \geqslant 1.$

Obviamente, si $\xi \leqslant 2$, entonces $\xi \leqslant x + 1$ para cualquier $x \geqslant 1$.
La función del ejemplo se ilustra gráficamente en la figura 3.4. ■

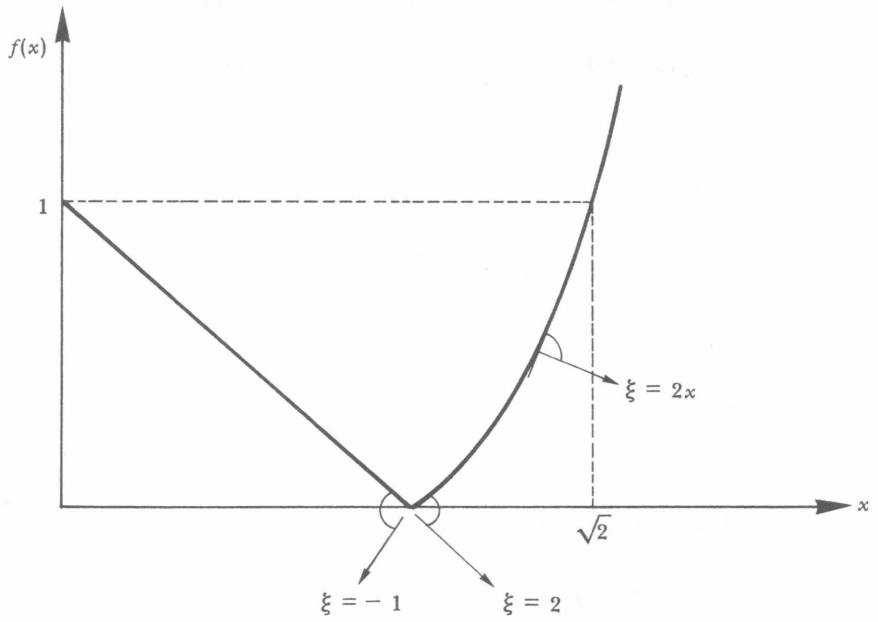


Figura 3.4.

Teorema 3.7 Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo en E^n y sea f: $S \to \mathcal{R}$ una función convexa sobre S. Entonces, $\forall\ \overline{x}$ en el interior de S, $\exists$ un subgradiente ξ de f, tal que el hiperplano

$$H = \{ (x, y) \mid y = f(\overline{x}) + \xi^T (x - \overline{x}) \}$$

soporta el epígrafo de f en $[\overline{x}, f(\overline{x})]$.

Prueba: Del teorema 3.2 corolario 2, existe $p \in E^{n+1}$ con $p_{n+1} \neq 0$, tal que:

$$p^T [(x, \gamma) - (\overline{x}, f(\overline{x}))] \leqslant 0 \quad \forall\ (x, \gamma) \in \Upsilon_f\ ;\ \overline{x} \in \overset{\circ}{S}$$

Entonces, haciendo $p^T = (q^T, p_{n+1})$ y un poco de manipulación algebraica resulta obvio que $\xi = \dfrac{q}{(p_{n+1})}$ es un subgradiente, y el resultado es inmediato. ■

3.4 FUNCIONES CONVEXAS DIFERENCIABLES

Cuando una función convexa es diferenciable, se puede caracterizar a través del gradiente, como se demuestra en los dos teoremas siguientes:

Teorema 3.8: Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo en E^n y f: $S \to \Re$ una función diferenciable sobre S. Entonces, f es convexa sobre S si y sólo si

$$f(y) \geqslant f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) \quad \forall\, x, y \in S.$$

f es *estrictamente convexa* si y sólo si

$$f(y) > f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) \quad \forall\, x, y \in S.$$

Prueba: (Necesidad). Si f es una función convexa sobre S, por definición se sabe que, dados $x, y \in S$ y $\theta \in [0, 1]$ se cumple la desigualdad siguiente:

$$f(\theta y + (1 - \theta) x) \leqslant \theta f(y) + (1 - \theta) f(x).$$

Es decir:

$$f(x + \theta(y - x)) \leqslant f(x) + \theta\, [f(y) - f(x)].$$

Cambiando el signo de la desigualdad, después de realizar algunos pasos algebraicos se obtiene que:

$$\theta[f(y) - f(x)] \geqslant f(x + \theta(y - x)) - f(x)$$

Dividiendo entre θ y rearreglando términos, se obtiene:

$$f(y) \geqslant f(x) + \frac{f(x + \theta(y - x)) - f(x)}{\theta}$$

para cualquier $\theta \in (0, 1)$.

De la sección 3.2 recuérdese que si f es diferenciable

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{f(x + \theta(y - x)) - f(x)}{\theta} = \nabla f(x)^T (y - x)$$

De modo que

$$f(y) \geqslant f(x) + \nabla f(x)^T (y - x).$$

(Suficiencia). Supóngase que

$$f(y) \geqslant f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) \quad \forall\, x, y \in S.$$

Sea $\overline{x} = \lambda x + (1 - \lambda) y$; $\lambda \in (0, 1)$. Como S es un conjunto convexo se tiene que $\overline{x} \in S$ y se satisface:

$$f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x})$$

$$f(y) \geqslant f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (y - \bar{x})$$

Multiplicando la primera desigualdad por λ, la segunda por $(1 - \lambda)$ y sumando las dos, después de un poco de manipulación algebraica, se obtiene:

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \geqslant f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T [\lambda (x - \bar{x}) + (1 - \lambda)(y - \bar{x})] =$$

$$= f(\bar{x}) = f(\lambda x + (1 - \lambda) y).$$

La demostración para funciones estrictamente convexas es análoga a la anterior. ■

Corolario. Sea f: $S \to \mathcal{R}$ una función convexa y diferenciable sobre S. Entonces, en cada punto interior $\bar{x}$ de S, f tiene solamente un subgradiente que es $\nabla f(\bar{x})$; el gradiente.

Prueba: Sea $\bar{x}$ un punto interior de S. Entonces, del teorema anterior, si $x \in S$, se tiene que:

$$f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}).$$

Ahora, sea ξ un subgradiente de f en $\bar{x}$, por definición se tiene que

$$f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \xi^T (x - \bar{x}) \quad \forall\, x \in S$$

Restando las desigualdades se obtiene:

$$(\nabla f(\bar{x}) - \xi)^T (x - \bar{x}) \leqslant 0 \quad \forall\, x \in S$$

Esto sólo puede ser cierto si $\nabla f(\bar{x}) = \xi$ ■

El teorema anterior proporciona una caracterización de las funciones convexas en términos del gradiente. En resumen, lo que dice es que cualquier aproximación lineal a una función convexa subestima su valor. Esto se describe gráficamente en la figura 3.5 y se había mencionado en términos generales cuando se dio la definición de subgradiente.

Otra caracterización interesante se tiene por el teorema siguiente:

Teorema 3.9: Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo y abierto en E^n y sea f: $S \to \mathcal{R}$ una función diferenciable sobre S. Entonces, f es *convexa* si y sólo si:

$$[\nabla f(x) - \nabla f(y)]^T (x - y) \geqslant 0 \quad \forall\, x, y \in S.$$

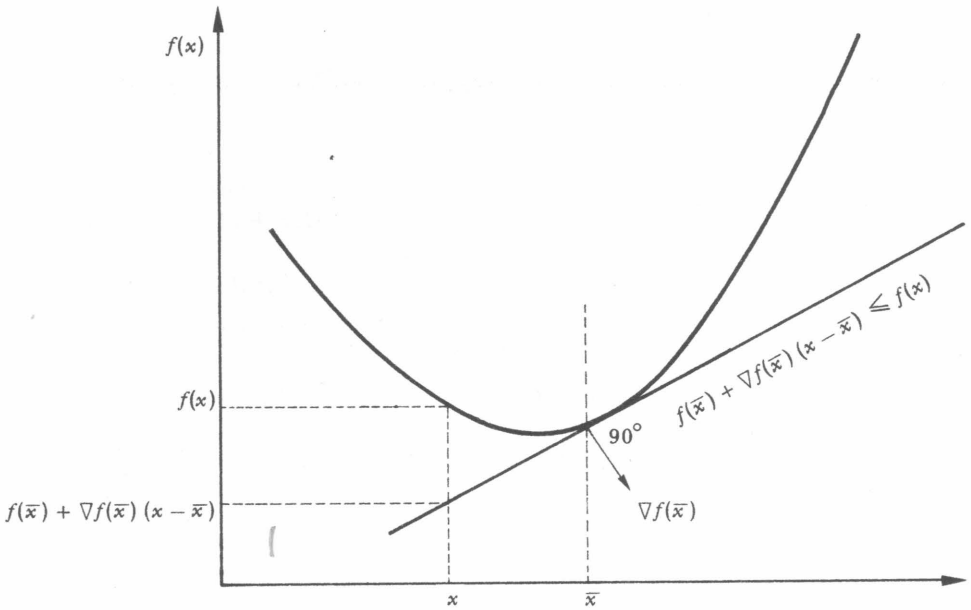


Figura 3.5.

f es *estrictamente convexa* si y sólo si

$$[\nabla f(x) - \nabla f(y)]^T (x - y) > 0 \quad \forall\, x, y \in S.$$

Prueba: (Necesidad). Supóngase que f es convexa y tómense $x, y \in S$. Del teorema anterior, se tiene que:

$$f(x) \geqslant f(y) + \nabla f(y)^T (x - y)$$

$$f(y) \geqslant f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$$

Sumando, se obtiene:

$$f(x) + f(y) \geqslant f(y) + f(x) - [\nabla f(x) - \nabla f(y)]^T \ (x - y)$$

$$\text{i.e. } -[\nabla f(x) - \nabla f(y)]^T \ (x - y) \leqslant 0$$

(Suficiencia). Sean $x, y \in S$ y supóngase que la relación es válida. El teorema del valor medio dice que

$$f(y) - f(x) = \nabla f(\bar{x})^T \ (y - x) \qquad \ldots . (1)$$

donde $\bar{x} = \lambda x + (1 - \lambda) y$ para alguna $\lambda \in (0, 1)$.

Ahora bien, se ha supuesto que la relación es válida y por lo tanto:

$$[\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(x)]^T (\bar{x} - x) \geqslant 0$$

Con esto se tiene que:

$$[\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(x)]^T (\bar{x} - x) = [\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(x)]^T(\lambda x + (1 - \lambda)y - x) =$$

$$= (1 - \lambda) [\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(x)]^T (y - x) \geqslant 0$$

y por lo tanto, $\nabla f(\bar{x})^T (y - x) \geqslant \nabla f(x)^T (y - x)$.

De la expresión (1) se obtiene,

$$f(y) - f(x) \geqslant \nabla f(x)^T (y - x)$$

Es decir,

$$f(y) \geqslant f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$$

lo cual implica que f es convexa por el teorema anterior.

El caso de convexidad estricta se prueba en forma análoga. ■

Intuitivamente, el teorema dice que la diferencia de gradientes tiene "el mismo signo" que la diferencia de puntos donde se evalúan, si la función es convexa. Esto a su vez significa que los vectores de diferencias forman un ángulo menor de 90° entre sí.

Otra caracterización conveniente se puede obtener si la función es diferenciable dos veces. Para esto, se requiere la siguiente definición:

Definición: Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo en E^n, y sea f: $S \to \mathcal{R}$. Entonces, se dice que f es *doblemente diferenciable* en $\bar{x} \in \overset{\circ}{S}$ si $\exists\ \nabla f(\bar{x}) \in E^n$, una matriz simétrica $H(\bar{x})$ llamada *"Hessiana"* y una función continua α: $E^n \to \mathcal{R}$, tal que:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \tfrac{1}{2} (x - \bar{x})^T H(\bar{x}) (x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\|^2 \alpha(\bar{x}; x - \bar{x})$$

para cualquier $x \in S$ y la función $\alpha(\bar{x}; x - \bar{x}) \to 0$, cuando $x \to \bar{x}$.

En E^n, si $H(\bar{x})$ existe, es la matriz de segundas derivadas parciales $(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)$. Se puede demostrar fácilmente que si las segundas derivadas parciales son continuas, entonces f es doblemente diferenciable.

Además, si f es doblemente diferenciable en cualquier $\bar{x} \in \overset{\circ}{S}$, entonces, es doblemente diferenciable sobre el interior de S.[41]

Definición:

i) Se dice que una matriz simétrica Q es *positiva semi-definida* $(Q \geqslant 0)$ si

$$x^T Q x \geqslant 0 \quad \forall x \in E^n$$

Es *negativa semi-definida* $(Q \leqslant 0)$ si $x^T Qx \leqslant 0 \quad \forall x \in E^n$.

ii) Se dice que es *positiva definida* $(Q > 0)$ si $x^T Qx > 0 \quad \forall x \in E^n, x \neq 0$

Es *negativa definida* $(Q < 0)$ si $x^T Qx < 0 \quad \forall x \in E^n, x \neq 0$.

Con esto se tiene el teorema siguiente:

Teorema 3.10 Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo abierto en E^n y f: $S \to \mathcal{R}$ una función con segundas derivadas parciales continuas sobre S. Entonces f es una función convexa si y sólo si $H(\bar{x})$ es positiva semi-definida $\forall \bar{x}$ en el interior de S.

Prueba: (Necesidad). Supóngase que f es convexa y que sus segundas derivadas parciales son continuas. Ahora supóngase que H *no* es positiva semidefinida en algún punto x en el interior de S. Entonces, como H es continua $\exists$ una vecindad de x; $B(x, \epsilon)$ y un punto $y \in E^n$ tal que:

$$(y - x)^T H(x + \theta(y - x))\,(y - x) < 0$$

donde θ es tal que $x + \theta(y - x) \in B(x, \epsilon)$

Entonces, la expansión de Taylor dice que:

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \tfrac{1}{2} (y - x)^T H(x - \theta(y - x))\,(y - x)$$

(Se puede suponer que y es tal que $\theta \in [0, 1]$)

Pero por (1), esto implicaría que

$$f(y) < f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$$

contradiciendo el supuesto de convexidad de f; según el teorema 3.8.

(Suficiencia). Supóngase que H es positiva semidefinida en todo punto interior de S. Entonces, por la expansión de Taylor se tiene que:

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \tfrac{1}{2} (x - y)^T H(\bar{x})\,(y - x)$$

donde $\bar{x} = x + \theta(y - x); \theta \in [0, 1]$.

Ahora, como H es positiva semidefinida, se tiene que:

$$\tfrac{1}{2}(y-x)^T H(\bar{x})\,(y-x) = f(y) - f(x) - \nabla f(x)^T\,(y-x) \geqslant 0$$

Es decir:

$$f(y) \geqslant f(x) - \nabla f(x)^T\,(y-x) \quad \forall\ x, y \in S$$

lo cual significa que f es convexa, por el teorema 3.8. ■

3.5 MAXIMOS Y MINIMOS DE UNA FUNCION CONVEXA

Para propósitos de este texto, la caracterización más importante de las funciones convexas se refiere a sus propiedades respecto a puntos óptimos; es decir, los puntos que minimizan o maximizan a la función en su región de definición. Para ver estas propiedades es necesario precisar los conceptos anteriores.

Definición: Sea f: $E^n \to \Re$ y considérese el problema:

$$\left.\begin{array}{l}\min f(x) \\ x \in S\end{array}\right\} \equiv (P)$$

donde $S \subset E^n$. Entonces,

i) Si $x \in S$; se dice que x es una *solución factible* para el problema (P)

ii) Sea $\bar{x} \in S$ tal que $\exists\, B(\bar{x}, \epsilon)$ para la cual

$$f(x) \geqslant f(\bar{x}) \quad \forall\ x \in B\,(\bar{x}, \epsilon) \cap S$$

entonces $\bar{x}$ es un *mínimo local* de f en S.

iii) Si $\bar{x} \in S$ es tal que $f(x) \geqslant f(\bar{x}) \quad \forall\ x \in S$ entonces $\bar{x}$ es una solución *óptima o un mínimo global* del problema (P).

Invirtiendo el sentido de las desigualdades, se obtienen las correspondientes definiciones para máximos locales y globales.

3.5.1 Mínimos de una función convexa

Como se verá en los siguientes dos teoremas, cuando la función es convexa los mínimos son globales. Aquí se demuestran los primeros resultados directamente relacionados con el tema central del texto. Se obtendrá una condición de optimalidad geométrica que será utilizada en el capítulo 5 para obtener condiciones de optimalidad de tipo lagrangeano.

Teorema 3.11. Sea S un conjunto convexo no-vacío en E^n; y f: $S \to \mathcal{R}$. Supóngase que $\bar{x}$ es un óptimo local del problema (P). Entonces:

i) Si f es una función convexa en S; $\bar{x}$ es un óptimo global de (P).
ii) Si f es estrictamente convexa, entonces $\bar{x}$ es un óptimo global *único* de f sobre S.

Prueba:

i) Como $\bar{x}$ es un óptimo local, $\exists\ B(\bar{x}, \epsilon)$ tal que:

$$f(x) \geqslant f(\bar{x}) \quad \forall x \in B(\bar{x}, \epsilon) \cap S.$$

Entonces, supóngase que $\bar{x}$ no fuera un óptimo global. Esto implicaría la existencia de $y \in S$, tal que $f(y) < f(\bar{x})$.

Como f es una función convexa se sabe, por definición, que:

$$f(\lambda y + (1-\lambda)\bar{x}) \leqslant \lambda f(y) + (1-\lambda) f(\bar{x})$$

$$< \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

para cualquier $\lambda \in (0, 1)$. Pero también $\exists \bar{\lambda}$ tal que:

$$\lambda y + (1-\lambda)\bar{x} \in B(\bar{x}, \epsilon) \cap S.$$

para cualquier $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$. Esto contradice el supuesto de que $\bar{x}$ es un óptimo local.

ii) Supóngase que f es estrictamente convexa; es decir, que para $x, y \in S$:

$$f(\lambda y + (1-\lambda)x) < \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x) \quad \forall \lambda \in (0, 1)$$

Sea $\bar{x}$ un óptimo global. Supóngase que y es otro óptimo global. Entonces:

$$f(\lambda y + (1-\lambda)\bar{x}) < \lambda f(y) + (1-\lambda) f(\bar{x}) = f(\bar{x}) = f(y) \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Pero $\lambda y + (1-\lambda)\bar{x} \in S \quad \forall \lambda \in (0, 1)$ por convexidad de S, y lo anterior contradice el supuesto de que y y $\bar{x}$ son óptimos globales. ■

Nótese que el teorema anterior no dice nada sobre la existencia de soluciones. Esto se remedia con el siguiente resultado, en donde se dan condiciones necesarias y suficientes para la existencia de óptimos. Nótese que el subgradiente estará definido sobre el mismo conjunto donde se define la función.

Teorema 3.12 Sea f: $E^n \to \Re$ una función convexa y $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo en E^n. Considérese el problema (P):

$$\begin{aligned} &\text{mín } f(x) \\ &\text{s.a. } x \in S \end{aligned}$$

Entonces, $\bar{x} \in S$ es una solución óptima de (P), si y sólo si f tiene un subgradiente ξ en $\bar{x}$, tal que

$$\xi^T (x - \bar{x}) \geqslant 0 \quad \forall x \in S.$$

Prueba: (Suficiencia) Si ξ es un subgradiente, satisface la relación siguiente:

$$f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \xi^T (x - \bar{x}) \quad \forall x \in S$$

Pero $\xi^T (x - \bar{x}) \geqslant 0$ por hipótesis y por lo tanto:

$$f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \xi^T (x - \bar{x}) \geqslant f(\bar{x}) \quad \forall x \in S$$

lo cual implica que $\bar{x}$ es un óptimo global de (P).

(Necesidad). Supóngase que $\bar{x}$ es una solución óptima global de (P). Constrúyanse los dos conjuntos siguientes:

$$C_1 = \{(x - \bar{x}, y) \mid x \in E^n ; y > f(x) - f(\bar{x})\}$$
$$C_2 = \{(x - \bar{x}, y) \mid x \in S \ ; y \leqslant 0\}$$

Se puede verificar fácilmente que C_1 y C_2 son conjuntos convexos. Además,

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset$$

ya que de lo contrario, $\exists$ (x, y) tal que

$$x \in S \ \text{ y } \ 0 \geqslant y > f(x) - f(\bar{x})$$

lo cual implica que $f(x) < f(\bar{x})$ con $x \in S$. Esto contradice el supuesto de que $\bar{x}$ es un óptimo global de (P) y por lo tanto es imposible.

Entonces, recuérdese que si C_1 y C_2 son conjuntos convexos tales que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $\exists$ un hiperplano que los separa; es decir, existen un vector $(\xi_0^T, \mu) \neq 0$ y una escalar α, tales que:

$$\xi_0^T (x - \bar{x}) + \mu y \leqslant \alpha \quad \forall (x - \bar{x}, y) \in C_1 \qquad \ldots (1)$$

$$\text{y} \quad \xi^T (x - \bar{x}) + \mu y \geqslant \alpha \quad \forall (x - \bar{x}, y) \in C_2 \qquad \ldots (2)$$

i) $\mu \leqslant 0;\ \alpha = 0$

Nótese que $(0, 0) \in C_2$ ya que $\bar{x} \in S$, $y = 0$ cumplen los requisitos. Por lo tanto, de (2) se obtiene que:

$$\alpha \leqslant 0$$

Además, $S \subset E^n$ y por lo tanto $(0, y) \in C_1$ implica que:

$$\mu y \leqslant \alpha \quad \forall (0, y) \in C_1 \qquad \ldots (3)$$

Pero a su vez, $(0, y) \in C_1$ permite que:

$$y > f(x) - f(\bar{x}) \geqslant 0$$

ya que $f(x) \geqslant f(\bar{x})$ cuando $x \in S \subset E^n$.

Entonces (3) tiene que mantenerse para cualquier $y > 0$, lo cual sólo puede cumplirse si $\mu \leqslant 0$ y $\alpha \geqslant 0$. Pero $\alpha \leqslant 0 \leqslant \alpha$ sólo puede ser cierto si $\alpha = 0$.

ii) $\mu < 0$

Supóngase que $\mu = 0$. Entonces, de (1):

$$\xi_0^T (x - \bar{x}) \leqslant 0 \quad \forall x \in E^n$$

pero $x = \bar{x} + \xi_0 \in E^n$ y esto implicaría que:

$$\xi_0^T (x - \bar{x}) = \xi_0^T (\bar{x} + \xi_0 - \bar{x}) = \|\xi_0\|^2 \leqslant 0$$

esto sólo puede ser si $\xi_0 = 0$, lo cual contradice que $(\xi_0, \mu) \neq 0$

iii) $\xi^T (x - \bar{x}) \geqslant 0 \quad \forall x \in S$; con $\xi = -\frac{1}{\mu}\, \xi_0$

Dividiendo (2) entre $-\mu$, se obtiene que,

$$-\frac{\xi_0^T}{\mu} (x - \bar{x}) - y \geqslant 0 \quad \forall (x - \bar{x}, y) \in C_2$$

Es decir:

$$-\frac{\xi_0^T}{\mu} (x - \bar{x}) - y \geqslant 0 \quad \forall x \in S;\ y \leqslant 0$$

Si se hace $y = 0$ y $\xi = -\frac{1}{\mu}\,\xi_0$, se obtiene que:

$$\xi^T (x - \bar{x}) \geqslant 0 \quad \forall x \in S$$

iv) $\xi = -\frac{1}{\mu}\,\xi_0$ *es un subgradiente de S.*

Dividiendo (1) entre $-\mu$ se obtiene que:

$$\xi^T (x - \bar{x}) - y \leqslant 0 \text{ cuando } y > f(x) + f(\bar{x});\ x \in E^n$$

además, si $x \in S$, $f(x) - f(\bar{x}) > 0$, ya que $\bar{x}$ es un óptimo local y dicha relación se mantiene para cualquier $y > 0$, por ejemplo $f(x) - f(\bar{x})$. Por lo tanto.

$$\xi^T (x - \bar{x}) - f(x) + f(\bar{x}) \leqslant 0 \quad \forall x \in S$$

$$\therefore f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \xi^T (x - \bar{x}) \quad \forall x \in S$$

Entonces, ξ es un subgradiente de f en $\bar{x} \in S$, con la propiedad de que $\xi^T (x - \bar{x}) \geqslant 0$ $\forall x \in S$, que es lo que había que demostrar. ■

Corolario 1: Bajo los supuestos del teorema, si S es un conjunto abierto, $\bar{x} \in S$ es una solución óptima, si y sólo si la función tiene un subgradiente $\xi = 0$ en $\bar{x}$. En particular, si $S = E^n$, entonces $\bar{x}$ es un óptimo global, si y sólo si la función tiene un subgradiente $\xi = 0$ en $\bar{x}$.

Prueba: El teorema 3.13 dice que $\bar{x}$ es una solución óptima si y sólo si existe un subgradiente ξ, tal que

$$\xi^T (x - \bar{x}) \geqslant 0$$

para cualquier x en S. Como S es un conjunto abierto, dado $\bar{x} \in S$, $\exists\, \bar{\lambda} > 0$, tal que $\bar{x} - \lambda\xi \in S$ para cualquier $\lambda \in (0, \bar{\lambda})$. Entonces

$$\xi^T (x - \bar{x}) = \xi^T (\bar{x} - \lambda\xi - \bar{x}) = -\lambda \|\xi\|^2 \geqslant 0$$

pero esto sólo puede pasar cuando $\xi = 0$. ■

Corolario 2: Dados los supuestos del teorema, supóngase que f es también diferenciable. Entonces, $\bar{x} \in S$ es una solución óptima si y sólo si

$$\nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) \geqslant 0 \quad \forall x \in S$$

Además, si S es abierto, $\bar{x}$ es una solución óptima si y sólo si $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

Ejemplo 3.3: Considérese el siguiente problema de optimización

$$\text{mín } f(x) = x^T Vx$$

$$\text{s.a. } x \in S = \{x \mid p^T x - \alpha \leqslant 0\}$$

donde V es una matriz simétrica y positiva definida. Se va a comprobar que el punto

$$\bar{x} = \frac{\alpha}{p^T V^{-1} p} V^{-1} p$$

es una solución, cuando $\alpha < 0$.

Como f es diferenciable, sólo tiene un subgradiente en $\bar{x}$; a saber:

$$\xi = \nabla f(\bar{x}) = 2 V \bar{x}$$

Ahora examínese la relación $\xi^T (x - \bar{x})$:

$$\nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) = \frac{2\alpha}{p^T V^{-1} p} p^T V^{-1} V(x - \frac{\alpha}{p^T V^{-1} p} V^{-1} p) = \frac{2\alpha}{p^T V^{-1} p} (p^T x - \alpha) \geqslant 0$$

ya que $\alpha < 0$ y $x \in S \Rightarrow p^T x - \alpha \leqslant 0$. ■

Nótese que esta condición geométrica sólo sirve en el ejemplo anterior como herramienta de comprobación, pero no dice nada de cómo obtener una solución. En el capítulo 5 se dará una forma más útil a esta condición y se podrá satisfacer la curiosidad del lector que esté un poco confundido (y acaso, malhumorado) por no entender de dónde salió la solución.

Este teorema y sus corolarios, proporcionan el primer resultado importante en el que se involucra un problema de optimización. Lo que se ha hecho es caracterizar puntos óptimos a través de subgradientes y se ha obtenido el conocido resultado de optimización irrestricta de que, si la función es diferenciable, entonces las derivadas desaparecen en el óptimo. Otra implicación muy importante es que, si $\bar{x}$ no es un óptimo, existe x, tal que

$$\nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) < 0$$

y $f(x) < f(\bar{x})$, por lo tanto, moverse en la dirección $d = x - \bar{x}$ producirá una solución que mejore el valor de f. Este resultado se ha utilizado extensamente para el diseño de métodos numéricos para resolver (P).

3.5.2 Maximización de funciones convexas

En esta sección se verá que, contrario a lo que se puede decir en el c[illegible] de minimización de una función convexa, cuando se maximiza los resulta[illegible]

son más débiles. En primer término se demuestra que el máximo de una función convexa que no sea la función constante definida sobre todo el espacio, no existe.

Teorema 3.13: Sea f: $E^n \rightarrow \mathcal{R}$ una función convexa para la cual existe $\bar{x} \in E^n$ que no sea un mínimo de f sobre E^n. Entonces, *no* existe $x^* \in E^n$ tal que $f(x^*) > f(x) \quad \forall x \in E^n$.

Prueba: Tómese cualquier punto $\bar{x} \in E^n$ que no sea un mínimo de f. Por convexidad de f se tiene que:

$$f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \xi^T (x - \bar{x}) \quad \forall x \in E^n$$

donde ξ es un subgradiente de f en $\bar{x}$.

Por el corolario 1 del teorema anterior, todos los subgradientes de f en $\bar{x}$ son distintos de cero, ya que $\bar{x}$ no es un mínimo.

Ahora, sea

$$x = \bar{x} + \tau\xi \text{ con } \tau > 0.$$

Entonces, se tiene que:

$$f(\bar{x} + \tau\xi) \geqslant f(\bar{x}) + \xi^T (\bar{x} + \tau\xi - \bar{x})$$

$$= f(\bar{x}) + \tau\xi^T\xi > f(\bar{x})$$

ya que $\tau\xi^T\xi > 0$. Por lo tanto, en cualquier punto $\bar{x}$, se puede encontrar otro punto $\bar{x} + \tau\xi$ que mejore el valor de la función, y f no tiene un máximo global. ■

En el siguiente teorema se presenta una condición necesaria para garantizar optimalidad local.

Teorema 3.14: Considérese el problema de maximizar f sobre un conjunto convexo no vacío $S \subset E^n$. Entonces, $\bar{x}$ es un máximo local de f sobre S, sólo si $\xi^T(x - \bar{x}) \leqslant 0$ para cualquier $x \in S$, y cualquier subgradiente ξ de f en $\bar{x}$.

Prueba: Si $\bar{x}$ es un máximo local de f sobre S, entonces $\exists\ B(\bar{x}, \epsilon)$ tal que

$$f(\bar{x}) \geqslant f[\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})] \quad \forall\ x \in B(\bar{x}, \epsilon) \cap S,$$

con λ suficientemente pequeño.

Además, sea ξ cualquier subgradiente de f en $\bar{x}$. Por convexidad de f, se sabe que:

$$f[\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})] \geqslant f(\bar{x}) + \xi^T (x - \bar{x})$$

De estas dos desigualdades se obtiene que

$$\xi^T (x - \bar{x}) \leqslant f[\bar{x} + \lambda(x - \bar{x})] - f(\bar{x}) \leqslant 0 \quad \blacksquare$$

Para poder demostrar el resultado más fuerte en el caso de maximización de una función convexa, se requiere la noción de un *punto extremo*. Una vez definido el concepto, se demuestra una relación que existe entre los puntos extremos de un conjunto convexo C, y cualquiera de sus hiperplanos de soporte.

Definición: Se dice que $\bar{x}$ es un punto extremo del conjunto convexo C, si no existen $x, y \in C; x \neq y$, tales que $\bar{x} = \lambda x + (1 - \lambda)$ para alguna $\lambda \in (0, 1)$.

Ejemplo 3.4: Considérese el conjunto $S = \{x \mid x^T x \leqslant \alpha\}$. Se probará que los puntos extremos de S están representados por su frontera $\partial S = \{x \mid x^T x = \alpha\}$. Así, sea $\bar{x} \in \partial S$ y supóngase que existen $x, y \in S; \lambda \in (0, 1)$ con $x \neq y$, tales que:

$$\bar{x} = \lambda x + (1 - \lambda)\, y$$

Ahora, examínese $\bar{x}^T \bar{x}$:

$$\bar{x}^T \bar{x} = \lambda^2 x^T x + (1 - \lambda)^2 y^T y + 2\lambda(1 - \lambda)\, x^T y$$

Sumando y restando $\lambda x^T x + (1 - \lambda)\, y^T y$ y haciendo los pasos algebraicos correspondientes, se llega a:

$$\bar{x}^T \bar{x} = \lambda x^T x + (1 - \lambda) y^T y - \lambda(1 - \lambda)\, \|x - y\|^2$$

$$< \alpha - \lambda(1 - \lambda)\, \|x - y\|^2 < \alpha$$

ya que $x \neq y$ y $\lambda \in (0, 1)$. Pero esto contradice al supuesto de que $\bar{x} \in \partial S$. $\blacksquare$

Teorema 3.15. Sea C un conjunto convexo, H un hiperplano de soporte de C y $T = C \cap H$. Entonces, todo punto extremo de T es un punto extremo de C.

Prueba: Supóngase lo contrario. Sea $\bar{x}$ un punto extremo de T, tal que $\bar{x}$ no es un punto extremo de C. Entonces existen $\lambda \in (0, 1)$ y $x, y \in C; x \neq y$, tales que:

$$\bar{x} = \lambda x + (1 - \lambda)\, y$$

Sea $H = \{x \mid a^T x = c\}$ el hiperplano de soporte de C y supóngase, sin perder generalidad que:

$$C \subset H^+ = \{x \mid a^T x \geqslant c\}$$

Entonces, $a^T x \geqslant c$ y $a^T y \geqslant c$. Pero $\bar{x} \in H$ y por lo tanto:

$$a^T \bar{x} = \lambda a^T x + (1 - \lambda)\, a^T y = c.$$

Pero esto sólo puede ser cierto si $a^T x = a^T y = c$ y por lo tanto $x, y \in H$. Así, $x, y \in C \cap H = T$, contradiciendo la hipótesis de que $\bar{x}$ es un punto extremo de T. ■

Gráficamente, el teorema anterior se ilustra en la figura 3.6.

Teorema 3.16. Sea f una función convexa definida sobre el conjunto convexo cerrado y acotado S. Si f tiene un máximo sobre S, $\exists$ un punto extremo de dicho conjunto, donde f alcanza el máximo.

Prueba: Sea $x^* \in S$ un punto que maximiza a f sobre S. Primero se demuestra que $\exists\ x^1$ sobre la frontera de S, tal que $f(x^1) = f(x^*)$.

Supóngase que x^* no está en la frontera de S, y sea L una línea que pasa por x^*. Entonces $L \cap S$, es un segmento de recta cuyos puntos extremos y^1, y^2 están en la frontera de S. Por lo tanto, existe $\alpha \in (0, 1)$, tal que

$$x^* = \alpha y^1 + (1 - \alpha)\, y^2$$

Como f es convexa, se tiene que:

$$f(x^*) \leqslant \alpha f(y^1) + (1 - \alpha)\, f(y^2) \leqslant \text{máx}\ \{f(y^1), f(y^2)\}$$

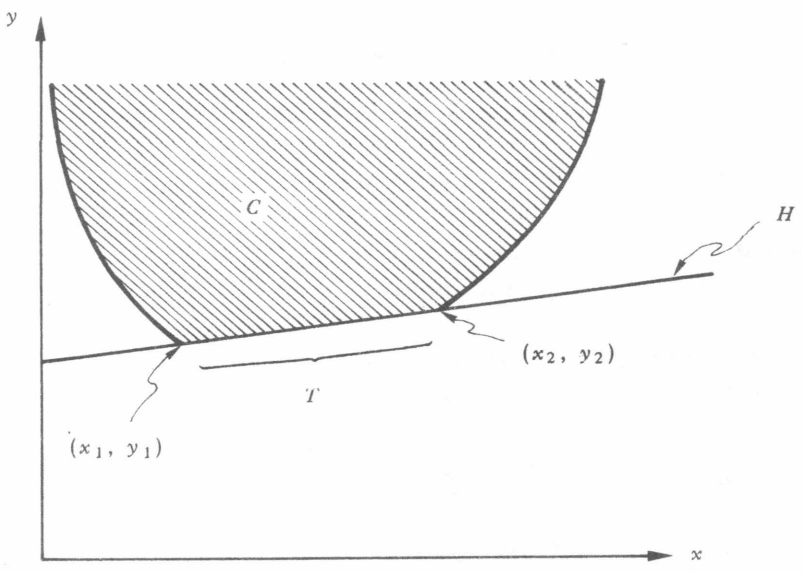


Figura 3.6.

Entonces, o y^1 es un máximo o y^2 lo es, y por lo tanto, hay un punto x^1 sobre la frontera que maximiza a f sobre S.

Como x^1 está en la frontera, se sabe que existe un hiperplano H que soporta a S y que contiene a x^1. Sea $T_1 = S \cap H$. Nótese que T_1 es de dimensión $n - 1$ cuando mucho.

Ahora, como x^1 maximiza a f sobre S, también la maximiza sobre T_1 y por lo tanto, $\exists\, x^2$ en la frontera de T_1 tal que $f(x^2) = f(x^1) = f(x^*)$. Entonces, si x^2 es un punto extremo de T_1, el teorema anterior dice que también lo es de S, y se termina el proceso.

El resto de la prueba se basa en que el proceso puede repetirse reduciendo sucesivamente la dimensión del espacio de interés. Para esto, nótese que al ser $T_1 = S \cap H$, se puede representar en un espacio de igual dimensión que H.

Entonces, supóngase que x^2 no es un punto extremo de T_1. Como T_1 es un conjunto convexo y x^2 está en la frontera de T_1, existe un hiperplano H_1 que soporta a T_1 en x^2. Sea $T_2 = T_1 \cap H_1$. Usando el mismo razonamiento anterior, $\exists\, x^3$ que maximiza a f sobre T_2, y que puede representarse en un espacio de dimensión igual a la dimensión de H_1. Como H_1 soporta a T_1 que se puede representar en un espacio de dimensión no mayor de $n - 1$, la dimensión de H_1 es cuando mucho $n - 2$.

Ahora bien, si x^3 es un punto extremo de T_2, también lo es de S y se termina el proceso. De lo contrario, se ve claramente que el proceso se puede repetir hasta que se encuentre un conjunto

$$T_k = T_{k-1} \cap H_{k-1}$$

para el cual $T_k = \{x^{k+1}\}$. Esto llevará a lo mucho $n - 1$ repeticiones del proceso. Entonces, por el teorema anterior, al ser x^{k+1} un punto extremo de T_k, también lo es de T_i; $i \leqslant k$ y por lo tanto, también de S. ■

Nótese que el teorema proporciona información limitada respecto a la solución del problema en cuestión, ya que sólo dice que si existe una solución, hay un punto extremo donde la función alcanza su máximo. Esto para ciertos problemas puede ser suficiente, pero en otros no, ya que pueden haber varios puntos extremos que sean óptimos locales, haciendo difícil saber cuál es el global.

Ejemplo 3.5: Considérense los dos problemas siguientes:

$$\text{mín } \|x - p\|^2 \qquad\qquad \text{máx } \|x - p\|^2$$

$$\text{s.a. } x^T x \leqslant \alpha \qquad\qquad \text{s.a. } x^T x \leqslant \alpha$$

Es fácil demostrar que la función $\|x - p\|^2$ es convexa. Geométricamente, estos problemas son los de encontrar los puntos $\bar{x}$, $\underline{x} \in S$ que están más "lejos" y más "cerca" de p, respectivamente. El problema de minimización

es trivial si $p \in S$ ya que en este caso $x = p$, y por lo tanto, supóngase que $p \notin S$.

A continuación se verifica que

$$\underline{x} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\|p\|} p \; ; \qquad \overline{x} = - \frac{\sqrt{\alpha}}{\|p\|} p$$

Para esto, nótese que $\xi = \nabla f(\underline{x}) = 2(\underline{x} - p) = 2 \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\|p\|} - 1 \right) p$

Entonces, de acuerdo con el teorema 3.12, se examina la relación $\xi^T (x - \underline{x})$ para cualquier $x \in S$. Es decir:

$$\nabla f(\underline{x})^T (x - \underline{x}) = 2 \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\|p\|} - 1 \right) p^T \left(x - \frac{\sqrt{\alpha}}{\|p\|} p \right)$$

$$= \frac{2}{\|p\|} (\sqrt{\alpha} - \|p\|) [p^T x - \sqrt{\alpha} \|p\|] \geqslant 0 \quad \forall x \in S$$

ya que si p $\notin S$; $\sqrt{\alpha} - \|p\| < 0$ y además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz; $p^T x \leqslant |p^T x| \leqslant \|p\| \, \|x\| \leqslant \sqrt{\alpha} \, \|p\|$.

Ahora, se aplica el teorema 3.14 para verificar que el punto extremo $\overline{x}$ es un máximo local. Para esto también se examina la relación mencionada, a saber:

$$\nabla f(\overline{x})^T (x - \overline{x}) = 2(\overline{x} - p)^T (x - \overline{x}) = - 2 \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\|p\|} p + p \right)^T \left(x + \frac{\sqrt{\alpha}}{\|p\|} p \right)$$

$$= - 2 \left(1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{\|p\|} \right) (x^T p + \sqrt{\alpha} \, \|p\|) \leqslant 0 \quad \forall x \in S$$

ya que si $x \in S$, se tiene que $|x^T p| \leqslant \sqrt{\alpha} \, \|p\|$ y por lo tanto,

$$x^T p + \sqrt{\alpha} \, \|p\| \geqslant 0 \quad \forall x \in S$$

Nótese que $\overline{x}$ es un máximo local, aun en el caso en que $p \in S$.

Ahora, se verá que $\overline{x}$ no sólo es un máximo local sino que es de hecho un máximo global. Para esto, examínese $f(x) = \|x - p\|^2$.

$$f(\overline{x}) = \| - \frac{\sqrt{\alpha}}{\|p\|} p - p \|^2 = \| - \left(1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{\|p\|} \right) p \|^2$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{\|p\|} \right)^2 \|p\|^2 = (\|p\| + \sqrt{\alpha})^2$$

Ahora, sea x cualquier otro elemento de S. Entonces:

$$\|x - p\|^2 = x^T x - 2p^T x + p^T p = \|x\|^2 - 2p^T x + \|p\|^2$$

$$\leqslant \|x\|^2 + 2\|p\|\,\|x\| + \|p\|^2$$

$$\leqslant \alpha + 2\sqrt{\alpha}\;\|p\| + \|p\|^2$$

$$= (\sqrt{\alpha} + \|p\|)^2$$

Además, de acuerdo con lo anterior, nótese que ningún otro punto extremo califica como un máximo local.

Finalmente, se pueden comparar los valores de la función objetivo:

$$f(\underline{x}) = \|\underline{x} - p\|^2 = \left\|\frac{\sqrt{\alpha}}{p^T p}\, p - p\right\|^2 = (\|p\| - \sqrt{\alpha})^2$$

Análogamente:

$$f(\overline{x}) = \|\overline{x} - p\|^2 = \left[\left(1 + \frac{\sqrt{\alpha}}{p^T p}\right)\|p\|\right] = (\|p\| + \sqrt{\alpha})^2$$

Haciendo un poco de álgebra, también se puede apreciar que la distancia entre $\underline{x}$ y $\overline{x}$ es:

$$\|\underline{x} - \overline{x}\| = \begin{cases} 2\sqrt{\alpha} \text{ si } p \notin S. \\ \|p\| + \sqrt{\alpha} \text{ si } p \in S \end{cases}$$

como era de esperarse. ■

El ejemplo anterior se representa gráficamente en la figura 3.7. Evidentemente, este es un caso muy bien comportado ya que en ambos problemas la solución es única. En el ejemplo siguiente se verá un caso de maximización de una función convexa donde lo anterior no sucede.

Ejemplo 3.6: Considérese el problema

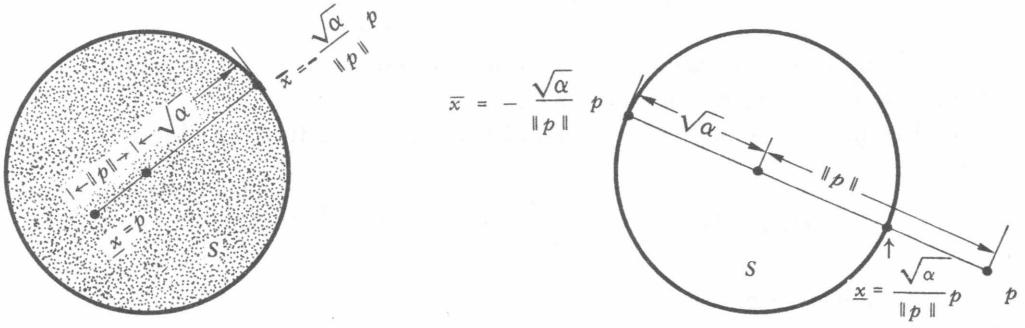
$$\text{máx } x^2$$

$$\text{s.a. } x \in [-1, 2] = S = \{x \in \mathcal{R} \mid x \geqslant -1; x \leqslant 2\}$$

Como $f(x) = x^2$ es una función convexa, el teorema 3.16 dice que la solución óptima está en un punto extremo. El conjunto S tiene dos puntos extremos; a saber: $x_1 = -1; x_2 = 2$. Obviamente $x^* = 2$ es el punto extremo en donde la función f alcanza su máximo en el intervalo especificado. Sin embargo, el lector podrá comprobar que las condiciones de optimalidad local se cumplen en cada uno de los puntos extremos. ■

$$\|\bar{x} - p\|^2 = \max_x \{\|x - p\|^2 \mid x^T x \leqslant \alpha\}$$

$$\|\underline{x} - p\|^2 = \min_x \{\|x - p\|^2 \mid x^T x \leqslant \alpha\}$$



a) $p \in S$ *b*) $p \notin S$

Figura 3.7

El ejemplo anterior, aunque sencillo, ilustra la complejidad del problema. Por ejemplo, si $S = \{x \mid Ax \leqslant b\} \subset E^n$; donde A es una matriz de "m" filas y "n" columnas, S puede llegar a tener hasta $\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ puntos extremos,[3,8] haciendo que la resolución del problema por enumeración directa pueda ser una tarea de cómputo formidable para valores altos de "n" y "m", $n > m$.

En resumen, es poca la información que se tiene en este caso, y como pueden haber problemas bien comportados en que sólo un punto extremo satisface las condiciones de optimalidad, lo más probable en situaciones más generales, es que haya una gran cantidad de puntos extremos que las satisfacen, haciendo difícil la solución del problema.

3.6 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

La importancia de la convexidad de funciones para la teoría de optimización se aprecia claramente en la sección anterior, donde se demuestra que si la función es convexa, sus mínimos son globales, mientras que sus máximos pueden ni siquiera existir, o ser difícil de identificar el global, entre todos los máximos locales. Así, para cualquier aplicación, es crucial el determinar las propiedades de convexidad de la función para poder precisar la clase de óptimo obtenido en un momento dado; es decir, si se trata de un óptimo global, o solamente local.

Los resultados obtenidos obedecen a un argumento de tipo geométrico basado, como se ha visto, en las caracterizaciones de una función convexa. Esta derivación de los resultados clásicos de teoría de optimización es a la vez más general y útil que la derivación clásica, que se verá en la primera par-

te del capítulo 5, en cuanto a que permite llegar fácilmente a resultados más generales que los obtenidos en la teoría clásica.

Sin embargo, esto no significa que los resultados de la teoría de optimización se obtengan solamente para las funciones convexas. En el capítulo siguiente se verá que la condición puede relajarse considerablemente, manteniendo la mayoría de las cualidades importantes para propósitos de optimización.

EJERCICIOS CAPITULO 3

1. Demuestre directamente según la definición básica que las funciones siguientes son convexas:

   a) $f(x) = q^T x + \frac{1}{2} x^T Qx; x \in E^n$

   donde Q es positiva semidefinida.

   b) $f(x) = e^{q^T x}$; $x \in E^n$

   c) $f(x) = e^{x^T x}$; $x \in E^n$

   d) $f(x, y) = \|x - y\|$; $(x, y) \in E^n \times E^n$.

2. Repita el ejercicio anterior, utilizando las propiedades de diferenciabilidad de las funciones.
3. Sea $f(x) = 1 + |x|$; $x \in \mathcal{R}$

   a) Describa el epígrafo y el hipógrafo de f. ¿Cuál de los dos es un conjunto convexo?
   b) f es ¿cóncava o convexa?
   c) Encuentre los subgradientes de f $\forall x \in \mathcal{R}$.

4. Demuestre el siguiente corolario del teorema 3.6:

   Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo en E^n y sea f: $S \to \mathcal{R}$ una función estrictamente convexa. Entonces, para toda $\bar{x}$ en el interior de S existe un subgradiente ξ tal que

   $$f(x) > f(\bar{x}) + \xi^T (x - \bar{x}) \quad \forall x \neq \bar{x} \; ; x \in S.$$

5. Considere la función siguiente:

   $$f(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0, 1] \; ; y \in (0, 1] \\ \\ \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 \text{ si } x \in [0, 1]; y = 0 \end{cases}$$

a) Identifique el conjunto S sobre el cual queda definida f.
b) Demuestre que $\xi = 0$ es un subgradiente de la función $\forall\, x$ en el interior de S.
c) Demuestre que el epígrafo de f no es un conjunto convexo y por lo tanto f no es una función convexa. ¿Qué significa esto en términos del teorema 3.6?

6. Demuestre el teorema siguiente:

Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo en E^n, y sea f: $S \to \mathcal{R}$. Ahora, supóngase que en cada punto $\bar{x}$ en el interior de S existe un subgradiente ξ tal que $f(x) \geqslant f(\bar{x}) + \xi^T (x - \bar{x})$ para cualquier $x \in S$. Entonces f es convexa en el interior de S.

¿Qué significa esto respecto al ejemplo del problema 5? ¿Cuál es la diferencia entre este teorema y el teorema 3.6?

7. Demuestre las siguientes proposiciones:

a) Si g: $E^n \to \mathcal{R}$ es una función cóncava, entonces

$$f(x) = \frac{1}{g(x)}$$

es una función convexa sobre $S = \{x \mid g(x) > 0\}$.
b) Sean h: $E^n \to \mathcal{R}$ y g: $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ dos funciones convexas. Entonces, si g es monótona no decreciente, $f(x) = g[h(x)]$ es una función convexa.
c) Sean h, g: $E^n \to \mathcal{R}$ funciones convexas. Entonces

$$f(x) = \alpha h(x) + \beta g(x)\,;\ \alpha, \beta \geqslant 0$$

es una función convexa.

8. Sea S un conjunto convexo no-vacío y acotado en E^n. Defínase la función f: $E^n \to \mathcal{R}$ siguiente:

$$f(y) = \sup\ \{y^T x \mid x \in S\}$$

f es la llamada "función de soporte" del conjunto S. Demuestre que f es una función convexa. Demuestre además, que si $f(y) = y^T \xi$ para algún $\xi \in \tilde{S}$; entonces ξ es un subgradiente de f en y.
9. Se dice que una función f: $E^n \to \mathcal{R}$ es "positivamente homogénea de primer grado" si dado $\theta \in \mathcal{R}$ se tiene que $f(\theta x) = \theta f(x)$ para toda $x \in E^n$. Demuestre que una función positivamente homogénea de primer grado es convexa, si y sólo si es "subaditiva"; es decir, si

$$f(x + y) \leqslant f(x) + f(y) \quad \forall\, x, y \in E^n.$$

10. Demuestre que una función "afín" (lineal) f: $E^n \to \mathcal{R}$ del tipo:

$$f(x) = a^T x - \alpha$$

es tanto convexa como cóncava.

11. Sea f: $E^n \to \mathcal{R}$ tal que

$$f(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y) \leqslant \tfrac{1}{2}f(x) + \tfrac{1}{2}f(y) \quad \forall\, x, y \in E^n$$

Demuestre que f es una función convexa. Ahora, suponga que f es tal que $\exists\, \overline{\theta} \in (0, 1)$ tal que $f(\overline{\theta}\ x + (1 - \overline{\theta})y) \leqslant \overline{\theta}\ f(x) + (1 - \overline{\theta})\, f(y)$ ¿Sigue validándose el resultado?

12. Utilizando las propiedades de convexidad de las funciones involucradas, demuestre la famosa desigualdad de la "media geométrica-aritmética":

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i \geqslant \prod_{i=1}^{n} (x_i)^{\lambda i};\ \ \lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i\ ;\ \Sigma\lambda_i = 1$$

13. Sea f: $E^n \to \mathcal{R}$ una función convexa y sea

$$\Omega = \{x^* \mid f(x^*) \leqslant f(x) \quad \forall\, x \in E^n\}$$

Demuestre que Ω es un conjunto convexo.

14. Se dice que una función f: $E^n \to \mathcal{R}$ es "fuertemente convexa" si $\forall\, x, y \in E^n$; $\lambda \in (0, 1)$ se tiene que:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda)y) - \delta[\lambda(1 - \lambda)\ \|x - y\|]$$

Donde δ es una función de λ, x, y tal que

$$\delta[\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|] \begin{cases} = 0 & \text{si } x = y \\ > 0 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Demuestre que $f(x) = x^T x$ es fuertemente convexa; donde f: $E^n \to \mathcal{R}$.

15. Sean f: $E^n \to \mathcal{R}$ y g: $E^n \to E^m$ funciones convexas y $h(x) = Ax$, donde A es una matriz $(n \times p)$

a) Demuestre que la función:

$$\phi\,(u) = \inf\{f(x) \mid g(x) \leqslant u\}$$

es convexa y que

$$u \leqslant v \Rightarrow \phi\,(u) \geqslant \phi\,(v)$$

b) Demuestre que la función:

$$\psi(y) = \inf\{f(x) \mid Ax = y\}$$

es convexa.

c) ¿Qué puede decir sobre

$$\theta(u, v) = \inf\{f(x) \mid g(x) \leqslant u\ ;\ Ax = v\}?$$

16. Sea $f(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in (0, 1) \\ 1 \text{ si } & x \in \{0, 1\} \end{cases}$ donde f: $[0, 1] \to \mathcal{R}$

Entonces:

a) $\xi = 0$ es un subgradiente de la función $\forall\, x \in (0, 1)$

b) $\xi = -1$ es un subgradiente de f sólo para algún $\bar{x} \in (0, 1)$

c) De lo anterior se concluye que $\xi \leqslant 0$ es un subgradiente de $f\ \forall\ \bar{x} \in (0, 1)$.

d) Nada de lo anterior es cierto.

17. Use el teorema 3.11 para verificar que la solución óptima del problema

$$\begin{aligned} &\text{mín } e^{x^T Q x} \\ &\text{s.a. } p^T x \leqslant \alpha \end{aligned}$$

es $x^* = \dfrac{\alpha}{p^T Q^{-1} p}\, Q^{-1} p$; donde $Q > 0$

18. Verifique que $x^* = \sqrt{\dfrac{\alpha}{p^T Q^{-1} p}}\, Q^{-1} p$ es la solución del problema:

$$\begin{aligned} &\text{mín } p^T x \\ &\text{s.a. } x^T Q x \leqslant \alpha \end{aligned}$$

19. Demuestre que la existencia de puntos extremos de un conjunto convexo C, quiere decir dos cosas:

a) El conjunto C está cerrado en sus puntos extremos

b) Si $x \in C$ es un punto extremo de C, entonces x está en la frontera de C.

20. Si C es un conjunto convexo cerrado y H es un hiperplano de soporte de C, demuestre que:

a) $T = C \cap H$ es un conjunto convexo.

b) La dimensión de T es cuando mucho $n - 1$.

c) Si H' es un hiperplano de soporte de T, también es un hiperplano de soporte de C.

21. Considérese el problema de optimización siguiente:

$$\text{máx } \|x - 2p\|^2$$

$$\text{s.a. } \|x + \mathbf{1}\|^2 \leqslant 1$$
$$\|x - \mathbf{1}\|^2 \leqslant 1$$

donde $x \in E^2$ y $p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Si

$$S = \{x \mid \|x + \mathbf{1}\|^2 \leqslant 1;\ \|x - \mathbf{1}\|^2 \leqslant 1\} \subset E^2$$

identifique sus puntos extremos por medio de un sistema de ecuaciones.

b) Comente sobre la solución del problema y diga cuáles puntos extremos satisfacen las condiciones de optimalidad local.

c) Encuentre la solución óptima.

22. Considere el problema de optimización siguiente:

$$\underset{x \in E^2}{\text{máx}} \ \|x - \alpha\,\mathbf{1}\|^2 \ ; \ \alpha > \sqrt{2}$$

$$\text{s.a. } x \leqslant \mathbf{1}$$
$$x \geqslant 0$$

repita el ejercicio anterior.

4 *Generalización de funciones convexas*

INTRODUCCION

Hasta aquí se han estudiado funciones y conjuntos convexos y se ha visto que tienen propiedades muy importantes para la optimización. Sin embargo, es imposible esperar que todas las funciones con que se va uno a encontrar sean convexas. Lo que interesa es averiguar hasta dónde se pueden relajar los supuestos de convexidad y mantener propiedades deseables para efectos de optimalidad.

Las generalizaciones a cuasi-convexidad y pseudo-convexidad se deben a De Finetti y Mangasarian, respectivamente, y buscan ampliar la clase de problemas de optimización "bien comportados". Es decir, la clase de funciones que garantizan que un programa matemático tiene un óptimo global único, y que no son necesariamente convexas. Por ejemplo, para una función pseudo-convexa, la desaparición del gradiente en un punto es una condición necesaria y suficiente para que el punto sea un mínimo global. Además, por medio de desigualdades en las que intervienen funciones pseudo-convexas y/o cuasi-convexas, se pueden definir conjuntos convexos. De ahí su importancia para los propósitos del tema central de este texto.

4.1 FUNCIONES CUASI-CONVEXAS

En este punto, se verán las funciones cuasi-convexas. Se empieza por su definición y por probar algunas propiedades generales de este tipo de funciones. En seguida, se definen funciones estricta y fuertemente cuasi-convexas, y se ven sus propiedades respecto a puntos óptimos. Finalmente, se habla de funciones cuasi-convexas diferenciables y se exploran las caracterizaciones de este tipo de funciones y sus propiedades respecto a puntos óptimos.

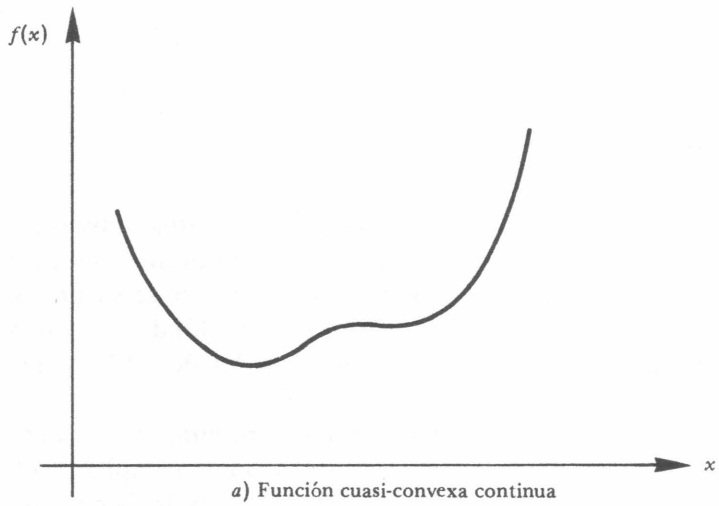
4.1.1 Definición y nociones básicas

Definición: Sea $f: S \to \mathcal{R}$ una función definida sobre un conjunto convexo no-vacío $S \subset E^n$. Se dice que f es *cuasi-convexa* sobre S, si para cualquier pareja de puntos $x, y \in S$, se tiene que:

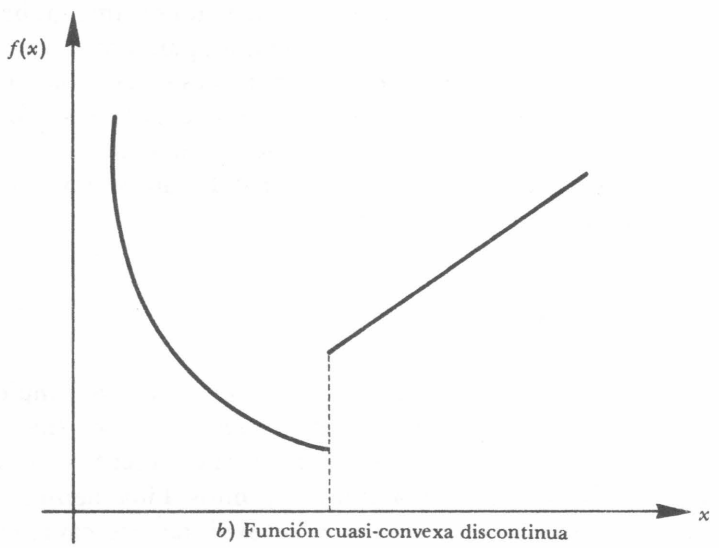
$$f(\lambda x + (1 - \lambda)\, y) \leqslant \text{máx}\ \{f(x), f(y)\} \forall\ \lambda \in [0,1].$$

Se dice que f es cuasi-cóncava, si $-f$ es cuasi-convexa.

En la figura 4.1 se presentan ejemplos de funciones cuasi-convexas.



a) Función cuasi-convexa continua



b) Función cuasi-convexa discontinua

Figura 4.1 Funciones cuasi-convexas.

Teorema 4.1: Sea $f:S \rightarrow \mathcal{R}$ una función definida sobre un conjunto convexo no-vacío $S \subset E^n$. Entonces, f es cuasi-convexa, si y sólo si el conjunto

$$S_\alpha = \{x \in S | f(x) \leqslant \alpha\}$$

es un conjunto convexo para cualquier $\alpha \in \mathcal{R}$.

Prueba: (Necesidad). Supóngase que f es cuasi-convexa, y sean $x, y \in S_\alpha$ para $\alpha \in \mathcal{R}$.

Como $x,y \in S_\alpha$ se tiene que $x,y \in S$ y que máx $\{f(x), f(y)\} \leqslant \alpha$.

Sean $z = \lambda x + (1-\lambda)y$; $\lambda \in [0,1]$. Entonces, $z \in S$ porque S es convexo y, como f es cuasi-convexa se tiene que:

$$f(z) \leqslant \text{máx } \{f(x), f(y)\} \leqslant \alpha.$$

Esto implica que $z \in S_\alpha$ y por lo tanto, que S_α es un conjunto convexo. *(Suficiencia).* Supóngase que S_α es un conjunto convexo para cualquier $\alpha \in \mathcal{R}$. Sean $x, y \in S$ y $\lambda \in [0,1]$ y sea $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

Si se hace $\alpha = \text{máx } \{f(x), f(y)\}$ se tiene que $x, y \in S_\alpha$. Además, por hipótesis, S_α es un conjunto convexo y por lo tanto:

$$f(z) \leqslant \alpha = \text{máx } \{f(x), f(y)\}$$

Por lo tanto, f es cuasi-convexa. ■

Otra propiedad interesante es que una función es cuasi-convexa si y sólo si la restricción de la función a cualquier segmento lineal es también cuasi-convexa. Esto se demuestra a continuación.

Teorema 4.2: Sea $f:S \rightarrow \mathcal{R}$ una función definida sobre un conjunto convexo $S \subset E^n$. Entonces, f es cuasi-convexa, si y sólo si para cualquier $x, y \in S$, se tiene que la función g: $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, definida según

$$g(\lambda) \equiv f[x + \lambda(y - x)]$$

es cuasi-convexa.

Prueba: La necesidad es obvia, por lo que sólo se demostrará la *suficiencia*. Así, supóngase que $f[x + \lambda(y - x)]$ es una función cuasi-convexa en λ, para cualesquier pareja de puntos $x, y \in S$. Pero esto implica que:

$$f[\theta(x + \lambda_1[y - x]) + (1 - \theta)(x + \lambda_2[y - x])]$$
$$\leqslant \text{máx}\{f(x + \lambda_1[y - x]), f(x + \lambda_2[y - x])\}$$

para cualquier pareja $x, y \in S$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \Re$ y $\theta \in [0,1]$. Esto significa que lo anterior es cierto para $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$, con lo cual se obtiene el resultado deseado. ■

En general, en una función cuasi-convexa un mínimo local no es necesariamente un mínimo global. Sin embargo, y quizás curiosamente, mínimos locales que no son globales, no pueden ser mínimos estrictos, como se demuestra en el teorema siguiente:

Teorema 4.3 Sea $f: S \to \Re$ una función cuasi-convexa definida sobre el conjunto convexo S. Entonces, si $x^* \in S$ es un mínimo local estricto, de hecho es un mínimo global estricto de f sobre S.

Prueba: Supóngase que x^* es un mínimo local estricto. Entonces, $\exists\ B(x^*,\epsilon)$, tal que

$$f(x) > f(x^*)\ \forall\ x \in B(x^*,\epsilon) \subset S.$$

Ahora, supóngase que x^* no es un mínimo global estricto de f sobre S, y por lo tanto $\exists\ \overline{x} \in S$, tal que $f(\overline{x}) \leqslant f(x^*)$; $\overline{x} \neq x^*$. Entonces, por cuasi-convexidad de f se tiene que

$$f(\lambda x^* + (1-\lambda)\,\overline{x}) \leqslant f(x^*)\ \forall\ \lambda \in (0,1).$$

Pero esto significa que $\exists\ \overline{\lambda} \in (0,1)$, tal que la desigualdad anterior se cumple y tal que

$$\lambda x^* + (1-\lambda)\,\overline{x} \in B(x,^*\epsilon)\quad \forall\ \lambda \in (0, \overline{\lambda})\ ,$$

lo cual es contradictorio. ■

4.1.2 Funciones estrictamente cuasi-convexas

Definición: Sea $f: S \to \Re$ una función definida sobre un conjunto convexo no-vacío $S \subset E^n$. Si para cualquier $x, y \in S$ con $f(x) \neq f(y)$, se tiene que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\,y) < \text{máx}\ \{f(x), f(y)\}$$

para $\lambda \in (0,1)$, entonces se dice que f es estrictamente cuasi-convexa.

Es estrictamente cuasi-cóncava si $-f$ es estrictamente cuasi-convexa.

Nótese que cualquier función convexa, es estrictamente cuasi-convexa. Para ver esto, supóngase que $f(y) > f(x)$. Entonces, como f es convexa, se tiene que:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)\,y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)\,f(y) < f(y) = \text{máx}\ \{f(x), f(y)\}.$$

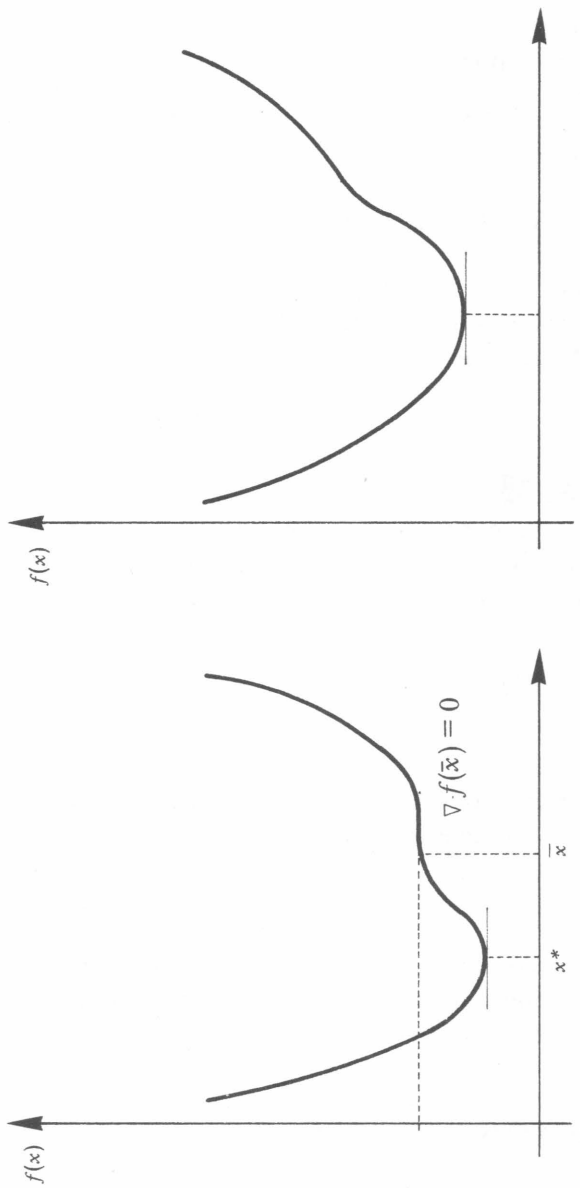

f(x)
x*
x̄
∇f(x̄) = 0
Función cuasi-convexa, pero no estrictamente cuasi-convexa.
f(x)
Función estrictamente cuasi-convexa

Figura 4.2

Además, nótese que la diferencia principal entre la función estrictamente cuasi-convexa y la que es solamente cuasi-convexa, es que en la primera no se admiten mínimos locales que no sean mínimos globales.

Esto se demuestra en el teorema siguiente:

Teorema 4.4 Sea f: $S \to \mathcal{R}$ una función estrictamente cuasi-convexa definida sobre un conjunto convexo no vacío $S \subset E^n$. Entonces, si $x^* \in S$ es un mínimo local, también es un mínimo global en S.

Prueba: Supóngase que $\overline{x} \in S$ es tal que $f(\overline{x}) < f(x^*)$. Como S es un conjunto convexo, entonces se tiene que:

$$z = \lambda \overline{x} + (1 - \lambda)\, x^* \in S \quad \forall\, \lambda \in [0,1]$$

Ahora, si x^* es un mínimo local, por definición $\exists\ \delta > 0$, tal que $f(x^*) \leqslant f(\lambda \overline{x} + (1 - \lambda)\, x^*)$ cuando $\lambda \in (0,\delta)$. Pero como f es estrictamente cuasi-convexa y $f(\overline{x}) < f(x^*)$, se tiene que

$$f(\overline{x} + (1 - \lambda)\, x^*) < f(x^*) \quad \forall\, \lambda \in (0,1),$$

esto es una contradicción. ■

Un hecho curioso es que, contrario a lo que pudiera suponerse, una función estrictamente cuasi-convexa no es necesariamente cuasi-convexa. Para ver esto, examínese el contraejemplo que proporciona la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

De acuerdo a la definición dada, f es estrictamente cuasi-convexa. Sin embargo, para $x = -1$; $y = 1$, se tiene que

$$f(\tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{2} y) = 1 > \text{máx}\ \{f(x), f(y)\} = 0$$

Para que estricta cuasi-convexidad implique cuasi-convexidad, se requiere que la función tenga alguna propiedad de continuidad. Se deja al lector demostrar que si una función continua es estrictamente cuasi-convexa, también es cuasi-convexa.

4.1.3 Funciones fuertemente cuasi-convexas

Definición: Sea f: $S \to \mathcal{R}$ una función definida sobre un conjunto convexo no vacío $S \subset E^n$. Entonces, se dice que f es *fuertemente* cuasi-convexa si $\forall\, x,y \in S; x \neq y$, se tiene que:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)\, y) < \text{máx}\ \{f(x), f(y)\}$$

para toda $\lambda \in (0,1)$. Se dice que es fuertemente cuasi-cóncava si $-f$ es fuertemente cuasi-convexa.

Se deja al lector demostrar que:

1. Toda función estrictamente convexa es fuertemente cuasi-convexa.
2. Toda función fuertemente cuasi-convexa es estrictamente cuasi-convexa.

La figura 4.3 muestra una función que es estrictamente cuasi-convexa pero no fuertemente cuasi-convexa. (Obviamente, la función del contra-ejemplo, también satisface lo anterior.)

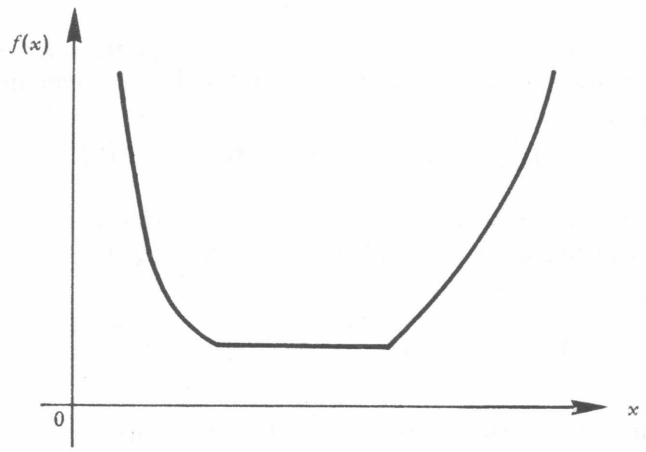


Figura 4.3

Teorema 4.5 Sea f: $E^n \to \mathfrak{R}$ una función fuertemente cuasi-convexa. Considérese el problema mín $f(x)$ para $x \in S \subset E^n$; donde S es un conjunto convexo no vacío. Entonces, si x^* es un óptimo local, es de hecho un óptimo global único.

Prueba: Como f fuertemente cuasi-convexa implica que es estrictamente cuasi-convexa, entonces, por el teorema 4.2, si x^* es un óptimo local, también es global. Para demostrar unicidad, supóngase que $\exists\ \overline{x} \neq x^*$ tal que $f(\overline{x}) = f(x^*)$. Entonces,

$$f(\lambda\overline{x} + (1-\lambda)\,x^*) < \text{máx}\ \{f(\overline{x}), f(x^*)\} = f(x^*)$$

para toda $\lambda \in (0,1)$. Esto es una contradicción. ■

4.1.4 Funciones cuasi-convexas diferenciables

En esta sección se examinan las caracterizaciones y propiedades de las funciones cuasi-convexas cuando éstas son diferenciables. En primer lugar, se examina una caracterización en términos del gradiente, que, como posteriormente se verá, motiva de forma muy natural al concepto de "pseudo-convexidad". En seguida, se verá una caracterización en términos de la Hessiana.

Teorema 4.6 Sea $f: S \to \Re$ una función diferenciable definida sobre un conjunto convexo y abierto S. Entonces, f es cuasi-convexa si y sólo si, para cualquier pareja $x, y \in S$, se tiene que

$$f(y) \leqslant f(x) \Rightarrow \nabla f(x)^T (y - x) \leqslant 0$$

Prueba (Necesidad): Sean $x, y \in S$ y sin perder generalidad supóngase que $f(y) \leqslant f(x)$. Como f es cuasi-convexa por definición, se tiene que

$$f(\lambda y + (1 - \lambda) x) \leqslant \text{máx. } \{f(x), f(y)\}$$

y por lo tanto, $f(x + \lambda (y - x)) - f(x) \leqslant 0$. Entonces, dividiendo entre λ y tomando el límite cuando λ tiende a cero, se tiene que:

$$\nabla f(x)^T (y - x) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x + \lambda (y - x)) - f(x)}{\lambda} \leqslant 0$$

(Suficiencia). Ahora, supóngase que $f(y) \leqslant f(x)$ implica $\nabla f(x)^T (y - x) \leqslant 0$. Se tiene que demostrar que f es cuasi-convexa; esto se hará por contradicción. Así, sean $x, y \in S$ tales que $f(y) < f(x)$ y defínanse los conjuntos:

$$C = \{z \mid z = (1 - \lambda) x + \lambda y\}$$

y

$$\Omega = \{z \mid f(x) < f(z) \quad \forall z \in C\}$$

Nótese que Ω es un conjunto convexo y abierto.

Supóngase que $\Omega \neq \emptyset$ y, por lo tanto,

$$f(y) \leqslant f(x) < f(z) \quad \forall z \in \Omega$$

De la hipótesis del teorema, se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f(z)^T (x - z) \leqslant 0 \\ \text{y} \qquad \nabla f(z)^T (y - z) \leqslant 0 \end{array}\right\} \quad \forall z \in \Omega$$

Sea $\bar{z} = (1 - \bar{\lambda}) x + \bar{\lambda} y \in \Omega$ con $\bar{\lambda} \in (0,1)$

Entonces, se tiene que:

$$\nabla f(\bar{z})^T (x - \bar{z}) = \nabla f(\bar{z})^T [x - (1 - \bar{\lambda}) x - \bar{\lambda} y]$$

$$= -\bar{\lambda} \nabla f(\bar{z})^T (x - y) \leqslant 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

Análogamente, se puede obtener que:

$$\nabla f(\bar{z})^T (y - \bar{z}) = (1 - \bar{\lambda}) \nabla f(\bar{z})^T (x - y) \leqslant 0 \qquad \ldots\ldots (2)$$

Obviamente, (1) y (2) sólo pueden ser ciertos si de hecho se tiene que:

$$\nabla f(\bar{z})^T (x - y) = 0 \qquad \ldots\ldots (3)$$

Ahora bien, como $\bar{z} \in \Omega$ se sabe que $f(x) < f(\bar{z})$. Además, como f es una función continua sobre S y Ω es un conjunto abierto respecto a C, $\exists$ un punto ω en la cerradura de Ω, de la forma

$$\omega = (1 - \mu)\bar{z} + \mu x \quad \text{con } \mu \in (0,1]$$

y tal que $f(\omega) = f(x)$. Entonces, el teorema del valor medio dice que para algún punto $\hat{z} \in \Omega$ se tiene:

$$0 < f(\bar{z}) - f(x) = f(\bar{z}) - f(\omega) = \nabla f(\hat{z})^T (\bar{z} - \omega) = \mu \nabla f(\hat{z})^T (\bar{z} - x)$$

y como $\bar{z} = (1 - \bar{\lambda}) x + \bar{\lambda} y$, se tiene finalmente que:

$$\mu \nabla f(\hat{z})^T (\bar{z} - x) = \mu \nabla f(\hat{z})^T [(1 - \bar{\lambda}) x + \bar{\lambda} y - x]$$

$$= \mu\lambda \nabla f(\hat{z})^T (y - x) > 0 \qquad \ldots\ldots (4)$$

Como $\hat{z} \in \Omega$ (4) contradice a (3). ■

La caracterización anterior se hizo en términos del gradiente. A continuación se verá que también es posible lograr caracterizaciones en base a la Hessiana, cuando f es diferenciable dos veces. El resultado original se debe a Katzner,[2 3] y la generalización que aquí se presenta es de Crouzeix.[5, 6] En esencia, la condición que se deriva indica que cualquier función cuasi-convexa que es diferenciable dos veces, tiene que tener propiedades de convexidad en una vecindad de cualquier punto donde desaparezca el gradiente. El teorema indica además, que en aquellos puntos donde el gradiente es distinto de cero, la función es convexa en el subespacio ortogonal al gradiente. Estas propiedades de convexidad se manifiestan porque en el primer caso la hessiana es positiva semi-definida, y en el segundo, porque es positiva semidefinida respecto a cualquier vector que sea ortogonal al gradiente.

Teorema 4.7: Sea $C \subset E^n$ un conjunto convexo abierto y sea $f: C \to \Re$ una función doblemente diferenciable, tal que:

a) $\forall\, x \in C$, tal que $\nabla f(x) = 0$, se tiene que la hessiana $H(x)$ es positiva definida.

b) $\forall\, x \in C; z \in E^n; z \neq 0$, tal que $\nabla f(x)^T z = 0$, se tiene que $z^T H(x)\, z \geqslant 0$.

Entonces, f es una función cuasi-convexa.

Prueba: Supóngase lo contrario. Entonces, $\exists\, x, y \in C; x \neq y$, y por continuidad de f, $\lambda^* \in [0,1]$ tales que:

$$M = f(\lambda^* y + (1 - \lambda^*) x) = \max_{\lambda \in [0,1]} f(\lambda y + (1 - \lambda)x) > \max \{ f(x), f(y) \}.$$

Sea $x^* = \lambda^* y + (1 - \lambda^*) x = x + \lambda^* z$; donde $z = y - x$. Además, supóngase que λ^* es la mínima λ, tal que $f(\lambda y + (1 - \lambda) x) = M$ y defínase la función:

$$g(\lambda) = f(x^* + \lambda z)$$

Nótese que $g(\lambda) = f(x + (\lambda^* + \lambda) z)$, de modo que $\lambda^* + \lambda \in [0,1]$ implica que $\lambda \in [-\lambda^*, 1 - \lambda^*]$ y $g(0) = M$. Entonces, $g(\lambda)$ es una función continua en λ, tal que:

$$g(\lambda) < f(x^*) = M \quad \forall\, \lambda \in [-\lambda^*, 0] \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$g(\lambda) \leqslant f(x^*) = M \quad \forall\, \lambda \in [0, 1 - \lambda^*) \qquad \ldots\ldots (2)$$

$$g'(\lambda^*) = \nabla f(x^*)^T z = 0 \qquad \ldots\ldots (3)$$

i) Bajo la hipótesis *a)*, si $\nabla f(x^*) = 0$, se tiene que $z^T H(x^*) z = g''(0) > 0$, y aplicando el teorema de Taylor a la función g se tiene que:

$$g(\lambda) = g(0) + \tfrac{1}{2}\lambda^2\, g''(0) = \lambda^2\, \epsilon(\lambda) \qquad \ldots\ldots (4)$$

donde $\epsilon(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to 0$.
Pero (4) implica que $g(\lambda) > g(0) = M$ para cualquier $\lambda \neq 0$ lo cual contradice a (1) y (2).

ii) Ahora examínese lo que sucede con la hipótesis *b)*. En este caso, $\nabla f(x^*) \neq 0$. Sin perder generalidad, supóngase que $x^* = 0$, y que $f(x^*) = g(0) = 0$. Además, supóngase que $\nabla f(x^*) = -e_n$, el enésimo vector unitario. De aquí al final de la prueba, se considera que el vector x está partido según:

$$x = \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}; \qquad r \in E^{n-1}; \theta \in \mathcal{R}.$$

Nótese además, que la condición *b*) se aplica a vectores z tales que $\nabla f(x^*)^T z = 0$ y por lo tanto, z tendrá que tener la forma $z^T = (u, 0)$ con $u \in E^{n-1}$ ya que $\nabla f(x^*) = \nabla f(0,0) = -e_n$.

Antes de continuar, se requiere introducir un poco de notación. Así, si $f(x,y)$: $E^n \to \mathcal{R}$, tal que $x \in E^m$; $y \in E^{n-m}$, las respectivas derivadas de la función serán denotadas según:

$\nabla_x f(x,y) \equiv$ El vector de derivadas parciales de f respecto a x.
$\nabla_y f(x,y) \equiv$ El vector de derivadas parciales de f respecto a y.
$\nabla_x^2 f(x,y) = \nabla_{xx} f(x,y) \equiv$ La matriz $(m \times m)$ de derivadas parciales de $\nabla_x f(x,y)$ respecto a x.
$\nabla_{y,x} f(x,y) \equiv$ La matriz $[(n-m) \times m]$ de derivadas parciales de $\nabla_y f(x,y)$ respecto a x.
$\nabla_y^2 f(x,y) \equiv \nabla_{yy} f(x,y)$ La matriz $[(n-m) \times (n-m)]$ de derivadas parciales de $\nabla_y f(x,y)$ respecto a y.

Ahora, recuérdese que el teorema de la función implícita dice que $\exists$ una vecindad V de $0 \in E^{n-1}$ y una función diferenciable dos veces h: $V \to \mathcal{R}$ tal que, para cualquier $r \in V$ se satisface:

$$f(r, h(r)) = 0 \text{ y } \nabla_\theta f(r, h(r)) < 0$$

El lector podrá verificar que si se deriva implícitamente $f(r, h(r))$ dos veces, y se aplica la regla de la cadena se obtiene:

$$\nabla_r f(r, h(r)) + \nabla_\theta f(r, h(r)) \nabla h(r) = 0$$

$$\text{y: } \nabla_r^2 f(r, h(r)) + \nabla_\theta f(r, h(r)) \nabla^2 h(r) + \nabla_{r\theta} f(r, h(r)) \nabla h(r)^T + \\ + \nabla h(r) [\nabla_\theta^2 f(r, h(r)) \nabla h(r)^T + \nabla_{\theta r} f(r, h(r))^T] = 0.$$

De estas ecuaciones se pueden despejar el gradiente y la hessiana de h, obteniendo:

$$\nabla h(r) = -\frac{1}{\nabla_\theta f(r, h(r))} \nabla_r f(r, h(r)) \qquad \ldots\ldots (5)$$

$$\nabla^2 h(r) = -\frac{1}{\nabla_\theta f(r,h(r))} \{\nabla_r^2 f(r,h(r)) + \nabla h(r) [\nabla_{\theta r} f(r,h(r))]^T + \\ + \nabla_{r\theta} f(r,h(r)) \nabla h(r)^T + \nabla_\theta^2 f(r,h(r)) \nabla h(r) \nabla h(r)^T \} \qquad \ldots\ldots (6)$$

Además, si se recuerda que $f(x^*) = f(0) = 0$; y $\nabla f(x^*) = \nabla f(0,0) = -e_n$, se deduce inmediatamente que $h(0) = 0$; $\nabla h(0) = 0$. Aplicando la condición *b*) para $r \in V$ y cualquier $z^T = (u,0)$; $u \in E^{n-1}$, se obtiene que:

$$\nabla_r f(r, h(r))^T u = \nabla h(r)^T u = 0$$
$$u^T \nabla_r^2 f(r, h(r)) u \geqslant 0$$

Por lo tanto, $u^T \nabla^2 h(r)\, u \geq 0 \;\forall\, r \in V;\; u \in E^{n-1}$ y h es una función convexa.

Ahora, pártase $z = y - x$ según (u, θ) y considérese el intervalo

$$I = [-\lambda^*, 0) \cap \{\lambda \mid \lambda\, u \in V\}$$

Entonces, $\lambda u \neq 0$, con lo cual se tiene que $h(\lambda u) \neq 0 \quad \forall\, \lambda \in I$, por la condición (1). Además, como h es una función convexa y $\nabla h(0) = 0$, dicha función tiene un mínimo en $r = 0$, con $h(0) = 0$ y por lo tanto, $h(\lambda u) > 0$ para cualquier $\lambda \in I$.

Por otra parte, como f es diferenciable dos veces, ∇f es continuo y $\exists$ una vecindad $V' \in V$ y $\zeta > 0$, tal que $\forall\, (r, \theta)$ con $r \in V$ y $\theta \in [-\zeta, \zeta]$, se tiene que:

$$\nabla_\theta f(r, \theta) < 0 \qquad \ldots\ldots (7)$$

Finalmente, como h es una función continua, $\exists\, \bar{\lambda} \in [-\lambda^*, 0]$, tal que $\bar{\lambda} u \in V$ y $h(\bar{\lambda} u) \in (0, \zeta)$. Entonces, de la condición (1) se sabe que $f(\bar{\lambda} u, 0) < 0$ y como h es la función implícita con $\bar{\lambda} u \in V$ y $h(\bar{\lambda} u) \in (0, \zeta)$ se tiene que $f(\bar{\lambda} u, h(\bar{\lambda} u)) = 0$. Esto significa que la función f aumenta de valor cuando su enésima componente aumenta de 0 a $h(\bar{\lambda} u) > 0$. Pero (7) implica que $\nabla_\theta f(\bar{\lambda} u, \theta) < 0$ para cualquier $\theta \in [0, h(\bar{\lambda} u)]$, lo cual es imposible a la luz de lo anterior. ■

4.2 FUNCIONES PSEUDO-CONVEXAS

En el punto anterior se dijo que para una función cuasi-convexa diferenciable $f(y) \leq f(x)$ implica $\nabla f(x)^T (y - x) \leq 0$. También se puede ver fácilmente que para una función cuasi-convexa $\nabla f(x) = 0$ no implica que x sea un óptimo global. Un ejemplo típico de esto es $f(x) = x^3$ en donde el gradiente desaparece en el origen, que no es un punto mínimo de la función. Esta observación conduce a la introducción del concepto de pseudo-convexidad, que se obtiene a través de una ligera modificación de la condición mencionada, y da lugar a la siguiente definición:

Definición: Sea $S \subset E^n$ un conjunto convexo abierto y $f: S \to \Re$ una función diferenciable sobre S. Se dice que f es una función *pseudo-convexa* si y sólo si $\forall\, x, y \in S$

$$f(y) < f(x) \;\Rightarrow\; \nabla f(x)^T (y - x) < 0.$$

Esto equivale a decir que

$$\nabla f(x)^T (y - x) \geq 0 \;\Rightarrow\; f(y) \geq f(x)$$

Se dice que la función es *estrictamente pseudo-convexa* si $\forall\, x, y \in S; x \neq y$, tal que $\nabla f(x)^T\ (y - x) \geqslant 0$, se tiene que $f(y) > f(x)$.

Para las respectivas definiciones de pseudo-concavidad basta cambiar los sentidos de las desigualdades (i.e. f pseudo-cóncava si $-f$ es pseudo-convexa, etc.).

La primera propiedad importante de estas funciones es que $\nabla f(x^*) = 0$, es condición necesaria y suficiente para que x^* sea un óptimo global. Esto se debe a que si $\nabla f(x^*) = 0$, entonces

$$\nabla f(x^*)^T\ (y - x^*) = 0 \quad \forall\, y \in S$$

Esto, por definición implica

$$f(y) \geqslant f(x^*) \quad \forall\, y \in S.$$

En la siguiente sección se verá que la desaparición del gradiente en puntos mínimos es una característica de las funciones pseudo-convexas. Como muchas de estas propiedades se basan en la relación que existe entre estas funciones y las cuasi-convexas, el análisis se realiza a través de las relaciones que existen entre ellas.

4.3 RELACIONES ENTRE FUNCIONES PSEUDO-CONVEXAS Y FUNCIONES CUASI-CONVEXAS, Y CARACTERIZACIONES ADICIONALES

En primer lugar, se demuestra que una función pseudo-convexa tiene casi todas las propiedades imaginables de cuasi-convexidad.

Teorema 4.8: Sea $S \subset E^n$ un conjunto convexo abierto y sea $f: S \to \mathcal{R}$ una función pseudo-convexa sobre S. Entonces f es cuasi-convexa y estrictamente cuasiconvexa. Si la función es estrictamente pseudo-convexa, entonces también es fuertemente cuasi-convexa.

Prueba:

a) Se demuestra que f es estrictamente cuasi-convexa, por reducción al absurdo. Así, supóngase que $\exists\ x, y \in S$, tales que $f(x) \neq f(y)$ y tal que:

$$f(z) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geqslant \text{máx}\ \{f(x), f(y)\}$$

para alguna $\lambda \in (0,1)$. Sin perder generalidad, supóngase que

$$f(y) > f(x)$$

de manera que:

$$f(z) \geqslant f(y) > f(x)$$

donde $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$
Como f es pseudo-convexa se tiene que:

$$\nabla f(z)^T (x - z) < 0$$

Ahora bien, $x - z = -\dfrac{(1-\lambda)}{\lambda}(y - z)$ y, por lo tanto:

$$\nabla f(z)^T (y - z) = -\frac{\lambda}{(1-\lambda)} \nabla f(z)^T (x - z) > 0$$

y por pseudo-convexidad de f debe ser cierto que:

$$f(y) \geqslant f(z) \Rightarrow f(y) = f(z)$$

Además, como $\nabla f(z)^T (y - z) > 0 \; \exists \; \sigma > 0$, tal que:

$$f(z + \tau(y - z)) > f(z) \quad \forall \tau \in (0,\sigma]$$

y por lo tanto, $\exists \; w = z + \tau (y - z) = \tau y + (1 - \tau)z$ con $\tau \in (0,1)$, tal que:

$$f(w) > f(z) = f(y)$$

Como f es pseudo-convexa se tiene que:

$$\nabla f(w)^T (y - w) < 0$$

y $$\nabla f(w)^T (z - w) < 0$$

pero $y - w = -\dfrac{\mu}{1-\mu}(z - w)$ donde $\mu = 1 - \tau$, lo cual proporciona la contradicción deseada.

b) Como una función pseudo-convexa es diferenciable, también es continua y por lo tanto f es cuasi-convexa.

c) Finalmente, por reducción al absurdo, se probará que f es fuertemente cuasi-convexa. Supóngase pues que $\exists \; x,y \in S$, tales que $x \neq y$ y:

$$f(z) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geqslant \text{máx } \{f(x), f(y)\}$$

para algún $\lambda \in (0,1)$. Como $f(x) \leqslant f(z)$, la pseudo-convexidad de f nos dice que: $\nabla f(z)^T (x - z) < 0$ y además, $f(y) \leqslant f(z)$ implica que $\nabla f(z)^T (y - z) < 0$.

Pero:
$$y - z = y - (\lambda x + (1 - \lambda)y)$$
$$= -\lambda (x - y)$$

y
$$x - z = (1 - \lambda)(x - y).$$

Con esto se tendría que:

$$\nabla f(z)^T (x - z) = (1 - \lambda) \nabla f(z)^T (x - y) < 0$$

y
$$\nabla f(z)^T (y - z) = -\lambda \nabla f(z)^T (x - y) < 0$$

lo cual es imposible. ■

Como ya se indicó, la principal virtud de las funciones pseudo-convexas es su buen comportamiento en puntos mínimos. En el siguiente teorema se verá que la desaparición del gradiente en puntos que minimizan la función, caracteriza a este tipo de funciones.

Teorema 4.9: Sea f una función diferenciable y cuasi-convexa definida sobre un conjunto convexo abierto $S \subset E^n$. Entonces, f es pseudo-convexa si y sólo si f tiene un mínimo en x cuando $\nabla f(x) = 0$.

Prueba: Supóngase que f es pseudo-convexa. Si $\nabla f(x)^T (y - x) = 0 \quad \forall y \in S$. Entonces de la definición de pseudo-convexidad, se obtiene que

$$f(y) \geqslant f(x) \quad \forall\, y \in S$$

Además, $\nabla f(x) \neq 0$ implica que x no es un mínimo, con lo que se demuestra la *necesidad.*

Ahora se demuestra suficiencia por reducción al absurdo. Supóngase que f no es pseudo-convexa pero que tiene un mínimo cuando $\nabla f(x) = 0$. Entonces, existen $x, y \in S$ tales que $f(y) < f(x)$; $\nabla f(x)^T (y - x) \geqslant 0$. Como x no minimiza f, se tiene que $\nabla f(x) \neq 0$.

Como f es cuasi-convexa sobre S, se sabe del teorema 4.5, que $f(y) < f(x)$ implica $\nabla f(x)^T (y - x) \leqslant 0$, y de lo anterior se deduce que esto sólo es posible si $\nabla f(x)^T (y - x) = 0$. Además, si f es diferenciable sobre S, también es continua y existe $\theta \in \mathcal{R}$; $\theta \neq 0$, tal que $f(y + \lambda \nabla f(x)) < f(x) \quad \forall \lambda \in (0, \theta)$. La cuasi-convexidad de f implica:

$$\frac{f[x + t(y + \lambda \nabla f(x) - x)] - f(x)}{t} \leqslant 0 \quad \forall t \in [0,1]$$

Entonces, tomando el límite cuando $t \to 0$ se tiene que

$$\nabla f(x)^T (y + \lambda \nabla f(x) - x) = \nabla f(x)^T (y - x) + \lambda \|\nabla f(x)\|^2 = \lambda \| \nabla f(x) \|^2 \leqslant 0$$

lo cual es absurdo, ya que $\lambda > 0$ y $\nabla f(x) \neq 0$. ■

Para completar el análisis, es deseable también explorar las condiciones de optimalidad local. Esto se hace en el siguiente teorema.

Teorema 4.10: Sea $f: S \to \mathcal{R}$ una función cuasi-convexa diferenciable definida sobre un conjunto convexo y abierto S. Entonces, f es pseudo-convexa si y sólo si f tiene un mínimo local en x cuando $\nabla f(x) = 0$.

Prueba: La necesidad es obvia, y para probar suficiencia sólo se requiere probar que el mínimo local es de hecho un mínimo global, ya que entonces el teorema 4.9 garantiza la pseudo-convexidad de f. Así, supóngase que la función tiene un mínimo local en $\bar{x} \in S$ con $\nabla f(\bar{x}) = 0$, y tal que $\bar{x}$ no es un mínimo global. Defínase el conjunto

$$T = \{x \in S \mid f(x) < f(\bar{x})\}$$

Como f es diferenciable y cuasi-convexa, la función es continua y por el teorema 4.1, T es un subconjunto convexo abierto y no-vacío de S.

Ahora bien, como f tiene un mínimo local en $\bar{x}$, y S es un conjunto abierto, $\exists\, B(\bar{x},\epsilon) \subset S$ tal que $f(x) \geqslant f(\bar{x}) \quad \forall\, x \in B(\bar{x},\epsilon)$ y por lo tanto,

$$T \cap B(\bar{x},\epsilon) = \emptyset$$

Esto implica que $\bar{x} \notin \tilde{T}$ (donde $\tilde{T}$ es la cerradura de T). Defínase el conjunto:

$$K = \{x \in S \mid x = \bar{x} + \lambda(y - \bar{x}); \lambda \in (0,1] \text{ y } y \in T\}$$

K también es un subconjunto convexo y abierto de S, y como f es cuasi-convexa, se tiene que

$$f(x) \leqslant f(\bar{x}) \quad \forall\, x \in K$$

Ahora bien, para cualquier $y \in T$, $\exists\ \lambda_y \in (0,1)$ tal que:

$$\bar{x} + \lambda(y - \bar{x}) \notin T \quad \forall\, \lambda \in [0, \lambda_y]$$
$$\bar{x} + \lambda(y - \bar{x}) \in T \quad \forall\, \lambda \in (\lambda_y, 1]$$

Sea $z = \bar{x} + \lambda_y (y - \bar{x})$. Entonces, como f es una función continua sobre S, se tiene que $f(z) = f(\bar{x})$. Además, $z \in K$ que al ser un conjunto convexo y abierto, es de hecho una vecindad de z, tal que

$$f(x) \leqslant f(z) \quad \forall\, x \in K$$

Es decir, z es un máximo local de f, y como f es diferenciable sobre S, necesariamente se tiene que $\nabla f(z) = 0$. Pero esto es una contradicción ya que se había supuesto que el gradiente sólo puede desaparecer en puntos donde f tiene un mínimo local. ■

Finalmente, se analiza una caracterización de segundo orden semejante a la que se presentó en el teorema 4.7, para funciones cuasi-convexas.

Teorema 4.11: Sea S un conjunto convexo abierto y $f: S \to \Re$ una función doblemente diferenciable sobre S. Entonces, f es pseudo-convexa sobre S si y sólo si dada $x \in S$:

a) $\nabla f(x) = 0$, implica que f tiene un mínimo local en x.

b) Si $\nabla f(x) \neq 0$, entonces $\forall\, h$, tal que $\nabla f(x)^T\ h = 0$, se tiene que $h^T\ H(x)h \geqslant 0$; donde $H(x)$ es la hessiana de f en x.

Prueba: Para probar la *necesidad* basta observar que al ser f pseudo-convexa, el teorema 4.8 dice que f es cuasi-convexa y el teorema 4.7 garantiza *b*), mientras que *a*) viene garantizado por el teorema anterior 4.10.

Para demostrar *suficiencia*, basta demostrar que f es cuasi-convexa y el resultado sigue inmediatamente por el teorema 4.10. Para esto, supóngase que f no es cuasi-convexa y aplíquese el mismo argumento del teorema 4.7. Así, sean $x, y \in S,\ x \neq y$, tales que:

$$M = \max_{\lambda \in [0,1]} f(x + \lambda(y - x)) > \max\ \{f(x), f(y)\}$$

Sea $g(\lambda) = f(x + \lambda(y - x))$, de modo que lo anterior se puede escribir según:

$$M = \max_{\lambda \in [0,1]} g(\lambda) > \max\ \{g(0), g(1)\}$$

Como g es una función continua en λ sobre el intervalo $[0,1]$, $\exists$ una λ^* máxima tal que:

$$g(\lambda) < M \quad \forall\, \lambda \in [0, \lambda^*)$$

Además, si $h = y - x$, es obvio que

$$g'(\lambda^*) = \nabla f(x + \lambda^* h)^T\ h = 0$$

Ahora bien, por la definición de λ^*, f no puede tener un mínimo local en $x + \lambda^* h$ por lo que $\nabla f(x + \lambda^* h) \neq 0$. De aquí se sigue la prueba como la de la segunda parte del teorema 4.7 hasta llegar a la contradicción deseada. ■

4.4 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

En este capítulo se expusieron los principales resultados que existen sobre funciones cuasi-convexas y pseudo-convexas. Sin embargo, el tema no ha sido agotado, existiendo una amplia literatura que por limitaciones de espacio y para propósitos de este texto no han podido ser incluidos. El lector interesado queda específicamente referido al artículo de Crouzeix y Ferland,[6] que además cuenta con una extensa bibliografía en esta materia.

Cabe además hacer un comentario en el sentido de que puede haber otro tipo de funciones que tienen propiedades de convexidad que las hacen interesantes para los propósitos de este texto; tal es el caso de las funciones "R-convexas" propuestas por Avriel.[1] Además, en este capítulo se ha tratado exclusivamente con funciones pseudo-convexas diferenciables. Se hace notar que, a pesar de que la definición original de pseudo-convexidad pide la diferenciabilidad de la función, es posible relajar el supuesto a uno menos restrictivo que utiliza la "derivada de Dini". (Véase S. Komlósi)[24], conservando muchas de las propiedades importantes de este tipo de funciones.

También resulta interesante la gran variedad de funciones que aparecen en forma natural en otras disciplinas con propiedades de cuasi-convexidad y pseudo-convexidad. Tal es el caso, por ejemplo, de las funciones que se originan de la estructura de preferencias del consumidor, en teoría económica, que son cuasi-convexas.[18, 23] Análogamente, en la teoría de finanzas, ciertos criterios de riesgo dan origen a funciones pseudo-convexas.[32] Además, en los ejercicios se puede observar que la cantidad de funciones que son pseudo o cuasi convexas es bastante amplia.

Finalmente, se señala que en términos de la teoría de optimización, se requieren propiedades de convexidad para poder obtener condiciones de suficiencia para otimalidad. Esto se analizará en el próximo capítulo. El tema es muy importante, como ya se ha podido observar y como se podrá reafirmar en los capítulos siguientes, tanto en la práctica como en algunas aplicaciones teóricas y la "convexización" de problemas, ha sido objeto de mucho estudio. El lector interesado queda referido al artículo de Horst.[16]

EJERCICIOS CAPITULO 4

1. Diga cuáles de las funciones siguientes son convexas, cóncavas, cuasi-convexas, cuasi-cóncavas, pseudo-convexas y pseudo-cóncavas.

a) $f(x) = p^T x$; $x \in E^n$
b) $f(x) = e^{\|x\|^2}$; $x \in E^n$
c) $f(x) = e^{-\|x\|^2}$; $x \in E^n$
d) $f(x) = x^3$; $x \in \mathcal{R}$
e) $f(x) = 1 + x^3$; $x \in \mathcal{R}$
f) $f(x) = 1 + x + x^3$; $x \in \mathcal{R}$

2. Considérese la función siguiente:

$$f(x) = 1 - e^{-\|x\|^2} \quad ; \qquad x \in E^n$$

a) ¿Es f una función pseudo-convexa, pseudo-cóncava, o ninguna de estas dos?

b) Encuentre x^* tal que $\nabla f(x^*) = 0$.

i) ¿Es x^* un mínimo o un máximo?
ii) ¿Local o global?
iii) ¿Nada de lo anterior es cierto?

3. Considérese la siguiente función cúbica:

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Diga bajo qué condiciones sobre los coeficientes es $f(x)$ una función:

a) Convexa o cóncava
b) Cuasi-convexa o cuasi-cóncava
c) Pseudo-convexa o pseudo-cóncava.

4. Demuestre que una función convexa es cuasi-convexa y, si es diferenciable, también es pseudo-convexa.
5. Demuestre que una función afín $f: E^n \to \mathcal{R}$, del tipo $f(x) = a^T x - \alpha$ es convexa y cóncava a la vez. A la luz del ejercicio anterior ¿qué propiedades de cuasi/pseudo-convexidad/concavidad tiene?
6. Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo no vacío. Se dice que una función $f: S \to \mathcal{R}$ es "cuasi-monotónica" si f es cuasi-convexa a la vez que cuasi-cóncava.

a) Demuestre que si f es cuasi-monotónica, el conjunto:

$$C = \{x \in S \mid f(x) = \alpha\}$$

es convexo $\forall \alpha \in \mathcal{R}$.

10. Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto convexo cerrado en E^n. Demuestre que si una función f: $S \to \mathcal{R}$ es pseudo lineal, y alcanza un mínimo sobre S, el punto donde alcanza el mínimo es un punto extremo de S.
11. Puede una función convexa no lineal ser:

    a) ¿Cuasi-cóncava?
    b) ¿Pseudo-cóncava?
    c) ¿Cóncava?

    Dé ejemplos en cada caso.
12. Sea f: $E^n \to \mathcal{R}$ una función cuadrática definida según $f(x) = x^T Qx$. Se dice que f es "positiva sub-definida", si $x^T Qx < 0$ implica que $Qx \geqslant 0$ ó $Qx \leqslant 0$, $\forall\, x \in E^n$. Demuestre que f es cuasi-convexa sobre $C = \{x \mid x \geqslant 0\}$ si y sólo si f es positiva sub-definida.
13. Se dice que f es "estrictamente positiva subdefinida", si $x^T Qx < 0$ implica $Qx > 0$ ó $Qx < 0$ $\forall\, x \in E^n$. Demuestre que f es pseudo-convexa sobre $C' = \{x \mid x \geqslant 0;\ x \neq 0\}$ si y sólo si es estrictamente positiva sub-definida.
14. Sean $g, h: S \to \mathcal{R}$ Funciones definidas sobre un conjunto convexo no vacío $S \subset E^n$. Considere la función fraccionaria.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

    Demuestre que si

    a) g es una función convexa, tal que $g(x) \geqslant 0$ $\forall\, x \in S$.
    b) h es una función cóncava y $h(x) > 0$ $\forall\, x \in S$.
    entonces f es cuasi-convexa sobre S.

    Demuestre, además, que si S es un conjunto abierto y g,h son diferenciables, f es de hecho pseudo-convexa.
15. Demuestre que la función fraccionaria del ejercicio anterior es cuasi-convexa si

    a) g es una función convexa sobre S y $g(x) \leqslant 0$ $\forall\, x \in S$.
    b) h es una función convexa sobre S y $h(x) > 0$ $\forall\, x \in S$.

    Demuestre que f es de hecho pseudo-convexa, si S es abierto y g,h son diferenciables.
16. Sean h, g: $S \to \mathcal{R}$ funciones definidas sobre un conjunto convexo no vacío $S \subset E^n$ y considere la función

$$f(x) = g(x)\, h(x)$$

Demuestre que f es cuasi-convexa, si

a) g es convexa y $g(x) \leqslant 0 \quad \forall\, x \in S$.
b) h es cóncava y $h(x) < 0 \quad \forall\, x \in S$.

Demuestre que f es pseudo-convexa si S es abierto y g,h son diferenciables.

17. Sea $f\colon E^m \to \mathfrak{R}$ una función convexa y sea A una matriz de "m" filas y "n" columnas ($m \times n$). Demuestre que la función $g\colon E^n \to \mathfrak{R}$ definida según:

$$g(x) = f(Ax)$$

es convexa.

18. Sean $g\colon E^n \to E^m$ y $h\colon E^n \to E^p$ funciones diferenciables y convexas. Sea $f\colon E^{m+p} \to \mathfrak{R}$ una función que tiene la propiedad siguiente:

$$u \geqslant x;\ v \geqslant y \Rightarrow f(u,v) \geqslant f(x,y)$$

donde $u,x \in E^m$; $v,y \in E^p$.
Defínase la función compuesta

$$\Phi\ (x) = f(g(x), h(x))$$

Demuestre las proposiciones siguientes:

a) Si f es una función convexa, entonces Φ también lo es.
b) Si f es pseudo-convexa Φ también lo es.
c) Si f es cuasi-convexa Φ también lo es.

19. Demuestre que las funciones siguientes son pseudo-cóncavas:

a) $f(x) = \dfrac{q^T x - \alpha}{\sqrt{x^T Q x}}$

definida sobre el conjunto $S = \{x \,|f(x) \geqslant 0;\ x \neq 0\}$ donde $Q > 0$.

b) $f(x) = \dfrac{p^T x}{x^T Q x}\ ;\ Q > 0$

definida sobre $S = \{x \,|p^T x > 0\}$

c) $f(x) = \dfrac{q^T x + \frac{1}{2} x^T Q x}{a^T x}\ ;\ Q > 0$

definida sobre el conjunto $S = \{x \,|a^T x < 0\}$.

20. Sea $g\colon S \to \mathfrak{R}$ una función definida sobre un conjunto convexo no vacío $S \subset E^n$. Demuestre que, si g es pseudo-convexa sobre S, entonces la función

$$f(x) = e^{g(x)}$$

también es pseudo-convexa sobre S.

5 *Optimización lagrangeana*

En los capítulos anteriores se han presentado ya algunos resultados importantes de la teoría de optimización. Así, en el capítulo 3 se demostró que una condición necesaria para que un punto $x^* \in S$ minimice a una función diferenciable f: $S \to \mathcal{R}$, sobre el conjunto convexo S, es que

$$\nabla f(x^*)^T (x - x^*) \geqslant 0 \; \forall \; x \in S$$

También se vio que si S es un conjunto abierto o todo el espacio, lo anterior implica que $\nabla f(x^*) = 0$, es condición necesaria para que x^* sea un mínimo de f sobre S. Además, se sabe que para que la condición sea suficiente, se requiere que f tenga alguna propiedad de convexidad.

En este capítulo se especifica el conjunto S con más precisión. En particular se verá lo que sucede cuando S se puede especificar por medio de un conjunto de igualdades y/o desigualdades que se conocen como restricciones. Entonces, las condiciones de optimalidad que se derivan son más precisas que las anteriores, en el sentido de que se expresan incluyendo explícitamente las restricciones que definen al conjunto S y son por tanto más fáciles de verificar. Además, se verá que bajo ciertos supuestos de convexidad las condiciones necesarias también son suficientes.

5.1 OPTIMIZACION CLASICA

Aunque no es estrictamente necesario, por razones históricas y para dar una visión completa de la teoría de optimización, en primer término se presentan los resultados de la optimización clásica. Así, aunque ya se han derivado resultados más generales, se hará una derivación clásica de las condiciones de optimalidad para problemas "irrestrictos" y después para problemas

restringidos por un sistema de ecuaciones, para llegar al conocido resultado de Lagrange. De esta manera se ubicará la teoría clásica dentro del estado actual de la teoría de optimización. El lector que lo desee, podrá pasar superficialmente por esta sección para seguir a las siguientes, que posiblemente sean de mayor interés.

5.1.1 Problemas irrestrictos

En este inciso se derivan de manera independiente, condiciones clásicas de optimalidad para el problema

$$\min_{x \in S} f(x)$$

siendo $f\colon S \to \mathcal{R}$ una función diferenciable definida sobre un conjunto convexo S y donde además, S es de hecho todo el espacio E^n o cuando menos un subconjunto abierto de E^n. Es decir, en los primeros dos teoremas se derivan los conocidos resultados de desaparición del gradiente y no negatividad de la segunda derivada en el mínimo, haciendo la generalización correspondiente a espacios Euclidianos de "n" dimensiones.

Se empieza por recordar que $x^* \in S$ es un *mínimo local* de f sobre S, si existe $B(x^*, \epsilon)$, tal que $f(x) \geqslant f(x^*)$ para cualquier $x \in B(x^*, \epsilon)$. Si de hecho $f(x) \geqslant f(x^*)$ para toda $x \in S$, entonces se dice que x^* es un *mínimo global* de f sobre S. Ahora, para entrar formalmente en materia, se da la siguiente definición:

Definición: Sea $f\colon S \to \mathcal{R}$ una función definida sobre un conjunto convexo S. Entonces $d \in E^n$ es una *dirección de descenso* para f en $x \in S$, si existe $\sigma \in \mathcal{R}$; $\sigma > 0$, tal que

$$f(x + \lambda d) < f(x) \quad \forall\ \lambda \in (0, \sigma].$$

Con esto se tiene el primer resultado de interés; a saber:

Lema 5.1 Sea $f\colon S \to \mathcal{R}$ una función diferenciable definida sobre un conjunto convexo S. Sean $x \in S$ y $d \in E^n$ tales que

$$\nabla f(x)^T d < 0$$

Entonces, d es una dirección de descenso para f en x.

Prueba: Como f es diferenciable, $\nabla f(x)^T d$ es una derivada direccional de f, y por definición se tiene que:

$$\nabla f(x)^T d = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(x + \tau d) - f(x)}{\tau} < 0$$

Entonces, por continuidad de f $\exists$ $\sigma > 0$, tal que $f(x + \tau d) < f(x)$ $\forall$ $\tau \in (0, \sigma]$. ■

Con este resultado, se pueden obtener fácilmente las condiciones necesarias de primer y segundo orden, según se presentan en el teorema siguiente:

Teorema 5.1 Condiciones necesarias de Optimalidad

Sea f: $S \to \mathcal{R}$ una función definida sobre un conjunto convexo abierto S. Entonces:

a) Si f es diferenciable y $\bar{x} \in S$ es un mínimo local de f, se tiene que $\nabla f(\bar{x}) = 0$. (Condición de primer orden).

b) Si f es doblemente diferenciable y $\bar{x} \in S$ es un mínimo local de f, se tiene que la hessiana $H(\bar{x})$ es positiva semi-definida. (Condición de segundo orden).

Prueba:

a) Supóngase que $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$. Como S es un conjunto abierto, existe $\epsilon > 0$. tal que $B(\bar{x}, \epsilon) \subset S$ y para cualquier $d \in E^n$, $\exists$ $\sigma_d > 0$, tal que

$$\bar{x} + \tau d \in B(\bar{x}, \epsilon)$$

$\forall$ $\tau \in [0, \sigma_d]$. Así, para $d = -\nabla f(\bar{x})$ se tiene que

$$\nabla f(\bar{x})^T d = -\nabla f(\bar{x})^T \nabla f(\bar{x}) = -||\nabla f(\bar{x})||^2 < 0$$

$y - \nabla f(\bar{x})$ es una dirección de descenso de f en $\bar{x}$. Entonces, existe $\sigma > 0$, tal que

$$f[\bar{x} - \tau \nabla f(\bar{x})] < f(\bar{x})$$

para cualquier $\tau \in (0, \sigma]$.

Ahora, sea $I = (0, \sigma] \cap (0, \sigma_d]$, donde $d = -\nabla f(\bar{x})$. Entonces, para cualquier $\tau \in I$ se tiene que

$$f(\bar{x} + \tau d) < f(\bar{x})$$

y

$$\bar{x} + \tau d \in S$$

contradiciendo el supuesto de que $\bar{x}$ es un mínimo local.

b) Si f es doblemente diferenciable, dado $d \in E^n$, tómese la expansión de Taylor en $\bar{x}$ sobre la dirección d; a saber:

$$f(\bar{x} + \lambda d) = f(\bar{x}) + \lambda \nabla f(\bar{x})^T d + \tfrac{1}{2}\lambda^2 d^T H(\bar{x}) d + \lambda^2 \|d\|^2 \alpha(\bar{x}, \lambda d)$$

donde $\alpha(\bar{x}; \lambda d) \to 0$ cuando $\lambda \to 0$.

De la parte *a*), se tiene que $\nabla f(\bar{x}) = 0$, y rearreglando términos y dividiendo entre λ^2 se obtiene:

$$\frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda^2} = \tfrac{1}{2} d^T H(\bar{x}) d + \|d\|^2 \alpha(\bar{x}; \lambda d).$$

Como $\bar{x}$ es un mínimo local, se tiene que $f(\bar{x} + \lambda d) \geqslant f(\bar{x})$ para λ suficientemente pequeño, y por lo tanto

$$\tfrac{1}{2} d^T H(\bar{x}) d + \|d\|^2 \alpha(\bar{x}: \lambda d) \geqslant 0$$

para λ suficientemente pequeño. Multiplicando por λ y tomando el límite cuando $\lambda \to 0$ se obtiene el resultado. ■

5.1.2 problemas restringidos por igualdades

Aquí se derivará el método de Lagrange para tratar problemas de optimización donde el conjunto S viene especificado por un sistema de ecuaciones; es decir,

$$\begin{aligned} &\text{mín } f(x) \\ &\text{s.a. } x \in S \equiv \{x \mid h(x) = 0\} \end{aligned}$$

donde h: $E^n \to E^m$, representa a las *restricciones* del problema y de ahora en adelante, f es *la función objetivo*

La derivación de las condiciones de optimalidad es clásica en el sentido de que se derivan a partir de la idea intuitiva de Lagrange, de que en el óptimo x^*, hay una relación de dependencia lineal entre el gradiente de la función f, y los gradientes de las funciones h_i, que componen a h; $i = 1, 2, \ldots, m$. Para esto es necesario recurrir al teorema de la función implícita como se presentó en el capítulo 1.

Teorema 5.2: Sean f: $E^n \to \mathcal{R}$; h: $E^n \to E^m$; $n > m$, funciones definidas sobre $S \subset E^n$. Supóngase que $x^* \in S$ es un mínimo local de f condicionado a $h(x^*) = 0$, y que existe $B(x^*, \epsilon) \subset S$ en donde f y h son diferenciables.

Entonces, si x^* es un punto regular de h, existe $u \in E^m$, tal que

$$\nabla f(x^*) = \nabla h(x^*)\, u.$$

Donde ∇h es la matriz Jacobina cuyas columnas son los gradientes $\nabla h_i(x^*)$ de las funciones h_i que componen a h.

Prueba: Nótese que $\nabla h(x^*)$ es una matriz de "n" filas y "m" columnas. Pártase x^* según

$$x^* = (v^*, w^*); v^* \in E^m; w^* \in E^{n-m}$$

Entonces, $\nabla_v h(v^*, w^*)$ es una matriz cuadrada de $(m \times m)$ y, como x^* es un punto regular, por definición se tiene que el determinante $|\nabla_v h\ (x^*)| \neq 0$. Por lo tanto, existe $u \in E^m$, tal que

$$\nabla_v f(x^*) = \nabla_v h(x^*)\ u \ldots . (1)$$

Entonces, por el teorema de la función implícita, se sabe que existen una función $\emptyset$: $E^{n-m} \rightarrow E^m$ y una vecindad $V \subset E^{n-m}$ de w^* tal que

$$v^* = \emptyset\ (w^*)$$

$$\text{y } f(x^*) = f(\emptyset(w^*), w^*)\ \forall w \in V. \quad \ldots . (2)$$

Ahora bien, como x^* es un mínimo, del teorema 5.1 se sabe que:

$$\nabla_w\ f(x^*) = \nabla_w\ f(\emptyset\ (w^*), w^*) = 0$$

Aplicando la regla de la cadena a (2), se tiene que:

$$\nabla_w\ f(x^*) = \nabla \emptyset(w^*)\ \nabla_v\ f(x^*) + \nabla_w\ f(x^*) = 0 \quad \ldots . (3)$$

También, del teorema de la función implícita se sabe que:

$$\nabla \emptyset(w^*)\ \nabla_v h(x^*) = -\ \nabla_w\ h(x^*)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por u, y rearreglando términos, se obtiene:

$$\nabla \emptyset(w)\ \nabla_v\ h(x^*)\ u + \nabla_w\ h(x^*)\ u = 0 \quad \ldots . (4)$$

Restándole (4) a (3) y rearreglando términos, se tiene que:

$$\nabla \emptyset(w^*)\ [\nabla_v\ f(x^*) - \nabla_w f(x^*)u] + \nabla_w\ f(x^*) - \nabla_w\ h(x^*)u = 0$$

Pero, por (1), lo anterior significa que:

$$\nabla_\omega f(x^*) - \nabla_w\ h(x^*)\ u = 0$$

Lo cual junto con (1) dice que:

$$\nabla f(x^*) - \nabla h(x^*)\, u = 0$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Con esto se llega a la definición de la *función de Lagrange*, ó *"Lagrangeano"*, dada por:

$$L(x, u) = f(x) + u^T h(x)$$

lo cual, a su vez conduce al conocido teorema de Lagrange:

Teorema 5.3: Supóngase que f, h satisfacen las hipótesis del teorema anterior en x^*. Entonces, existe $u^* \in E^m$, tal que

$$\nabla_x L(x^*, u^*) = \nabla f(x^*) + \nabla h(x^*)\, u^* = 0.$$

Prueba: Esta es obvia a la luz del teorema anterior. ■

Esta derivación de las condiciones de Lagrange es obviamente moderna. Debe darse mucho crédito (si es que necesita más) a Lagrange por su derivación, en donde parte del Lagrangeano y de alguna manera intuye la necesidad del teorema de la función implícita. Quizás para algunos lectores sea interesante ver cuál fue el razonamiento original y cómo la función $L(x, u)$ de Lagrange surge de un truco ingenioso. Así, el lector interesado queda referido a la obra clásica de Hancock,[13] que presenta dicha derivación de una manera más accesible que el escrito original.

5.2 CONDICIONES NECESARIAS DE OPTIMALIDAD PARA PROBLEMAS CON RESTRICCIONES ESPECIFICADAS POR DESIGUALDADES

Considérese ahora el problema

$$\begin{aligned} &\text{mín } f(x) \\ &\text{s.a. } g(x) \leqslant 0 \end{aligned}$$

Donde f: $E^n \to \mathcal{R}$; g: $E^n \to E^m$; $n \geqslant m$. Supóngase que f y g son diferenciables en la región de interés. En esta sección, se derivan condiciones semejantes a las de Lagrange para caracterizar los óptimos del problema. Para esto, se requiere introducir algunos conceptos nuevos.

5.2.1 El concepto de una dirección factible

En primer término, es conveniente darle un nombre al conjunto de todos los puntos x que satisfacen las restricciones. Así, considérese el problema

$$\left.\begin{array}{l} \text{mín } f(x) \\ \\ \text{sujeto a: } x \in S \end{array}\right\} \qquad (P)$$

Entonces, al conjunto S, se le conoce como "la Región Factible" del problema (P). Además, si $x \in S$, se dice que x es *un punto factible*. Con esto, se tiene la definición siguiente:

Definición: Sea $S \subset E^n$ un conjunto no-vacío, y sea $\bar{x} \in \tilde{S}$. Entonces, se dice que $d \in E^n$ es una *dirección factible* en $\bar{x}$ si existe $\sigma > 0$, tal que

$$x = \bar{x} + \tau d \in S \quad \forall\ \tau \in (0, \sigma).$$

Definición: Sea $S \subset E^n$ un conjunto no-vacío y sea $\bar{x} \in \tilde{S}$. Entonces, al conjunto de *todas* las direcciones factibles en $\bar{x}$, se le conoce como el *cono de direcciones factibles* de S en $\bar{x}$. Es decir,

$$D(\bar{x}) \equiv d \neq 0 \mid \exists\ \sigma > 0 \ni \bar{x} + \lambda d \in S \quad \forall\ \lambda \in (0, \sigma)\}$$

Intuitivamente, una dirección "d" es factible, a partir de $\bar{x} \in S$, si es posible "moverse" (mucho o poco pero "algo") en esa dirección, y obtener otros puntos factibles.

5.2.2 Condiciones geométricas

Del punto 5.1 se sabe que si $d \in D$ es una dirección de descenso tal que $\nabla f(\bar{x})^T\ d < 0$, es posible moverse en esa dirección y obtener un punto $x \in S$, tal que $f(x) < f(\bar{x})$. De este hecho, se intuye que, para que $\bar{x}$ sea un óptimo local de f sobre S, es necesario que $\nabla f(\bar{x})^T\ d \geqslant 0\ \forall\ d \in D(\bar{x})$. Es decir, $\nabla f(\bar{x})^T\ d < 0 \Rightarrow d \notin D(\bar{x})$. Esta idea geométrica da lugar al teorema que se demuestra a continuación.

Teorema 5.4: Considérese el problema (P) donde $S \subset E^n$ y $S \neq \phi$. Supóngase que f es diferenciable en $\bar{x} \in S$ y defínase:

$$\Phi(\bar{x}) = \{d \mid \nabla f(\bar{x})^T\ d < 0\}$$

Entonces, si $\bar{x}$ es un mínimo local de f en S, se tiene que

$$\Phi(\bar{x}) \cap D(\bar{x}) = \phi$$

Prueba: Supóngase lo contrario. Entonces, existen $\sigma, \delta > 0$, tales que

$$\begin{aligned} & f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x}) \quad \forall\, \lambda \in (0, \sigma] \\ \text{y} \quad & \bar{x} + \lambda d \in S \qquad \forall\, \lambda \in (0, \delta) \end{aligned}$$

Entonces, con $\theta = \text{mín}\ \{\sigma, \delta\} > 0$, se tiene que

$$\left.\begin{aligned} & f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x}) \\ \text{y} \quad & \bar{x} + \lambda d \in S \end{aligned}\right\} \quad \forall\, \lambda \in (0, \theta),$$

lo cual contradice el supuesto de que $\bar{x}$ es un mínimo local. ■

Gráficamente, lo anterior se ilustra en la figura 5.1.

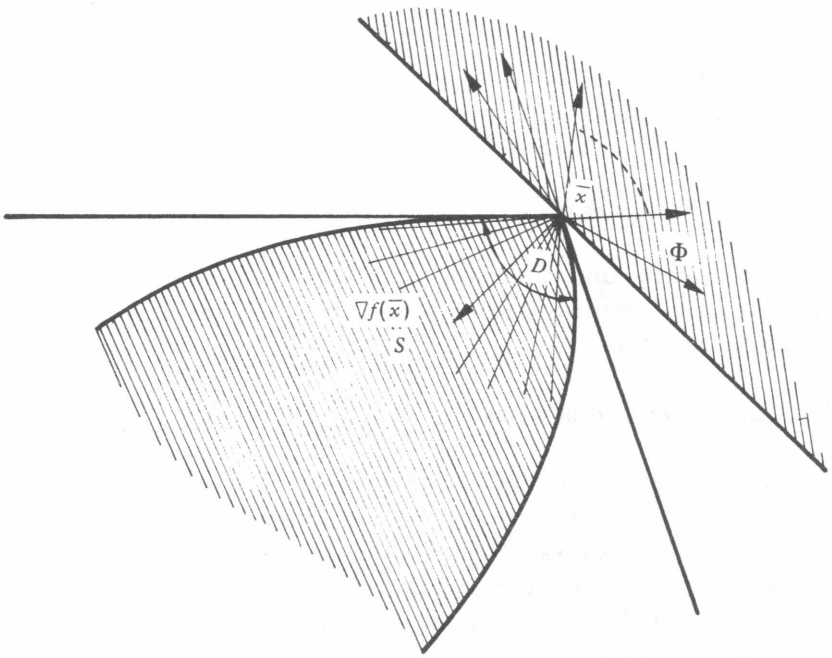


Figura 5.1

Corolario: Si $\bar{x}$ es un mínimo local de f sobre S, entonces $\Phi(\bar{x}) \cap \widetilde{D}(\bar{x}) = \phi$.

Prueba: Sea $\bar{d} \in \widetilde{D}(\bar{x})$ y $\{d^k\}_{k=1}^{\infty} \subset D(\bar{x})$ una sucesión tal que $d^k \to \bar{d}$. Como $d^k \in D(x)\ \forall\ k$ y $\Phi(\bar{x}) \cap D(\bar{x}) = \phi$, se tiene que

$$\nabla f(\bar{x})^T d^k \geqslant 0 \quad \forall\ k$$

Entonces, tomando el límite cuando $k \to \infty$, se tiene que

$$\lim_{k \to \infty} \nabla f(\bar{x})^T d^k = \nabla f(\bar{x})^T \bar{d} \geqslant 0 \quad \blacksquare$$

Ahora, supóngase que la región factible se especifica de la manera siguiente:

$$S = \{x \mid g(x) \leqslant 0; x \in X \subset E^n\}$$

Donde g: $E^n \to E^m$ y $X \neq \emptyset$ es un conjunto abierto. Entonces (P) es un problema de *Programación No-Lineal* con función objetivo f y restricciones definidas por un conjunto de desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} \min f(x) \\ x \in X \\ \\ \text{Sujeto a: } g(x) \leqslant 0 \end{array}\right\} \quad \text{(PNL)}$$

En lo que resta del capítulo será conveniente introducir la notación que se presenta a continuación. Para esto, recuérdese que la función g está compuesta por funciones g_i: $E^n \to \mathcal{R}$; $i = 1, 2, \ldots, m$. Entonces, si $\bar{x} \in X$ es un punto factible, defínanse los conjuntos de índices siguientes:

$$I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\} \equiv \text{Conjunto de restricciones } \textit{activas} \text{ en } \bar{x}$$

$$\bar{I} = \{i \mid g_i(\bar{x}) < 0\} \equiv \text{Conjunto de restricciones } \textit{pasivas} \text{ en } \bar{x}$$

Entonces, si $p = |I|$ denota la cardinalidad de I, se tiene que $|I| + |\bar{I}| = m$ y las funciones g_I: $E^n \to E^p$; $g_{\bar{I}}$: $E^n \to E^{m-p}$ son funciones compuestas por g_i: $E^n \to \mathcal{R}$, tales que $i \in I$ e $i \in \bar{I}$, respectivamente. Análogamente, $\nabla g_I(\bar{x})$ y $\nabla g_{\bar{I}}(\bar{x})$ son las matrices Jacobinas de vectores de derivadas parciales de las g_i para $i \in I$ e $i \in \bar{I}$, respectivamente.

Ahora, se explora cómo quedan las condiciones geométricas para PNL.

Teorema 5.5: Sean g: $E^n \to E^m$ y f: $E^n \to \mathcal{R}$ funciones continuas en un punto $\bar{x} \in X$, tal que $g(\bar{x}) \leqslant 0$. Sea $I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$ y supóngase que f y g_i son diferenciables en $\bar{x}$ para $i \in I$.

Defínanse los conjuntos:

$$\Phi(\bar{x}) = \{d \mid \nabla f(\bar{x})^T d < 0\}$$

$$\Gamma(\bar{x}) = \{d \mid \nabla g_I(\bar{x})^T d < 0\}$$

Entonces, si $\bar{x}$ es un óptimo local, se tiene que:

$$\Phi(\bar{x}) \cap \Gamma(\bar{x}) = \phi$$

Prueba: Sea $d \in \Gamma(\bar{x})$. Como $\bar{x} \in X$, que es un conjunto abierto, $\exists\ \delta_1 > 0$, tal que

$$\bar{x} + \tau d \in X \quad \forall\ \tau \in (0, \delta_1).$$

Además, para $\bar{I}$, $g_{\bar{I}}(\bar{x}) < 0$ y por continuidad de g, se tiene que existe $\delta_2 > 0$, tal que

$$g_{\bar{I}}(\bar{x} + \tau d) < 0 \quad \forall\ \tau \in (0, \delta_2).$$

Finalmente, como $d \in \Gamma(\bar{x})$, se tiene que $\nabla g_I(\bar{x})^T\ d < 0$ y existe $\delta_3 > 0$, tal que

$$g_I(\bar{x} + \tau d) < g_I(\bar{x}) \leqslant 0 \quad \forall\ \tau \in (0, \delta_3).$$

Entonces, para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, se tiene que:

$$\left.\begin{array}{r} g(\bar{x} + \tau d) \leqslant 0 \\ \bar{x} + \tau d \in X \end{array}\right\} \forall\ \tau \in (0, \delta)$$

lo cual indica que $d \in D(\bar{x})$ y por lo tanto $\Gamma(\bar{x}) \subset D(\bar{x})$. Del teorema anterior, el que $\bar{x}$ sea un óptimo implica $\Phi(\bar{x}) \cap D(\bar{x}) = \phi$ lo cual implica que

$$\Phi(\bar{x}) \cap \Gamma(\bar{x}) = \phi. \quad \blacksquare$$

5.2.3 Las condiciones de Fritz-John

Ahora, se transforman las condiciones geométricas de optimalidad que se han desarrollado, a una forma más fácil de usar. Estas condiciones son las de Fritz-John.

Teorema 5.6: (Condiciones Necesarias de Fritz-John) Sea $\bar{x}$ un punto factible para (PNL) y $|I| = p$. Supóngase que $g_I: E^n \to E^p$ y $f: E^n \to \mathcal{R}$ son diferenciables en $\bar{x}$. Entonces, si $\bar{x}$ es un mínimo local de f sobre S, existen $u_0 \in \mathcal{R}$; $\bar{u}_I \in E^p$; $\bar{u}_{\bar{I}} \in E^{m-p}$ con $(u_0, \bar{u}_I^T) \neq 0$, tales que:

$$\begin{aligned} u_0\ \nabla f(\bar{x}) + \nabla\ g(\bar{x})\,\bar{u} &= 0 && \ldots\ (\text{i}) \\ (u_0, \bar{u}^T) &\geqslant 0 && \ldots\ (\text{ii}) \\ u^T\ g(\bar{x}) &= 0 && \ldots\ (\text{iii}) \end{aligned}$$

Donde, sin perder generalidad puede suponerse que $\bar{u}^T = (u_I^T, u_{\bar{I}}^T) \in E^m$.

Prueba: Como $\bar{x}$ es un mínimo local de f sobre S, por el teorema 5.5, no puede existir $d \in E^n$, tal que:

$$\nabla f(\bar{x})^T d < 0$$
$$\text{y } \nabla g_I(\bar{x})^T d < 0$$

Sea A la matriz cuyas columnas son $[\nabla f(\bar{x}), \nabla g_I(\bar{x})]$. Entonces, la condición anterior equivale a decir que el sistema $A^T d < 0$ no tiene solución.

Entonces, el teorema de la alternativa de Gordan dice que existe $(u_0, \bar{u}_I^T) \geqslant 0$; $(u_0, \bar{u}_I^T) \neq 0$, tal que:

$$(u_0, \bar{u}_I^T) A^T = A \begin{pmatrix} u_0 \\ \bar{u}_I \end{pmatrix} = 0.$$

Esto equivale a decir que:

$$u_0 \nabla f(\bar{x}) + \nabla g_I(\bar{x}) \bar{u}_I = 0.$$

Ahora, nótese que $g_I(\bar{x}) = 0$ por definición, y por lo tanto,

$$\bar{u}_I^T g_I(\bar{x}) = 0.$$

Como la condición es que solamente $(u_0, \bar{u}_I^T) \neq 0$; haciendo $\bar{u}_{\bar{I}} = 0$, se tiene que

$$\nabla g_{\bar{I}}(\bar{x})\, u_{\bar{I}} = 0 \text{ y}$$

$$u_I^T g_{\bar{I}}(\bar{x}) = 0.$$

Entonces, haciendo $\bar{u}^T = (\bar{u}_I^T, \bar{u}_{\bar{I}}^T)$, esta condición junto con la anterior dice que

$$u_0 \nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x}) \bar{u} = 0$$

$$\bar{u}^T g(\bar{x}) = (\bar{u}_I^T, \bar{u}_{\bar{I}}^T) \begin{bmatrix} g_I(\bar{x}) \\ \\ g_{\bar{I}}(\bar{x}) \end{bmatrix} = 0$$

como se quería demostrar. ■

El vector $(u_0, \overline{u}^T)$ del teorema se conoce como el vector de "multiplicadores de Lagrange". La razón es obvia ya que la primera de las condiciones (*i*) es muy parecida a la condición de Lagrange que se derivó en el punto anterior.

Como se recordará, la condición la obtuvo Lagrange para problemas restringidos por igualdades, mientras que el PNL está restringido por desigualdades. En este sentido, PNL es menos restrictivo que el problema que trató Lagrange y por lo tanto se tiene que pagar un precio, ya que ahora es necesario además, cumplir las condiciones adicionales (*ii*) y (*iii*).

Así, para el problema restringido por desigualdades, además de la condición de Lagrange, es necesario que los multiplicadores u_0, u_I sean no-negativos. Pero también es necesario que se cumpla la condición de HOLGURA COMPLEMENTARIA; es decir, $u^T g(\overline{x}) = 0$. Este nombre es adecuado ya que $u_i > 0$ sólo se permite cuando $i \in I$; es decir, cuando $g_i(\overline{x}) = 0$. En este caso no hay "holgura" en la restricción, pero sí la hay en el multiplicador, en el sentido de que la restricción g_i efectivamente está restringiendo la solución. Por esto también se dice que *la restricción está activa.*

Por el contrario, cuando $i \notin I$, se tiene que $g_i(\overline{x}) < 0$ y por lo tanto, hay holgura en la restricción: *la restricción es pasiva.* Pero también, cuando $i \notin I$ se tiene que $u_i = 0$; es decir, no hay holgura en el multiplicador. De lo anterior se desprende el concepto de holguras complementarias.

En resumen, la condición de holgura complementaria se puede interpretar de la manera siguiente:

$$a) \qquad u_i > 0 \Rightarrow g_i(\overline{x}) = 0 \Rightarrow i \in I$$

$$b) \qquad g_i(\overline{x}) < 0 \Rightarrow u_i = 0 \Rightarrow i \in \overline{I}$$

Es importante notar, sin embargo, que las condiciones *no* dicen que $u_i = 0 \Rightarrow g_i(\overline{x}) < 0$, ni tampoco que $g_i(\overline{x}) = 0 \Rightarrow u_i > 0$.

5.2.4 Las condiciones de Karush, Kuhn y Tucker

Aunque cronológicamente se descubrieron antes las condiciones de Fritz-John que las de Kuhn y Tucker, y de que las primeras son más generales que las últimas, las condiciones de K-T tuvieron mucha mayor divulgación y son de hecho más útiles. Esto se debe a que es posible que se cumplan las condiciones de *F-J* trivialmente, en puntos no óptimos. Así, hay casos donde sucede que $\nabla f(\overline{x}) = 0$ y/o $\nabla g_i(\overline{x}) = 0$ para alguna $i \in I$, y se puede dejar que los correspondientes multiplicadores de Lagrange sean cualquier número positivo y los demás cero, para cumplir las condiciones trivialmente en puntos no óptimos. Además, también es posible que algunos $\nabla g_i(\overline{x})$ con $i \in I$ generen un cono convexo, que contenga a todos los demás. Esto hace posible cumplir las condiciones haciendo u_0 igual a cero, con consecuencias semejantes, como se ilustra en el ejemplo 5.1 que se presenta a continuación.

Ejemplo 5.1 Considérese el problema siguiente:

$$\text{mín } -x$$
$$\text{sujeto a: } g_1(x, y) \equiv y - (1 - x)^3 \leqslant 0$$
$$g_2(x, y) \equiv -y \leqslant 0$$

La región factible para este problema se ilustra en la figura 5.2. A continuación se verifica que las condiciones de Fritz-John se satisfacen en el óptimo $x^* = (1, 0)^T$. Nótese que en este punto ambas restricciones son activas y que:

$$\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \nabla g_I(x^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Así, $u_0 \nabla f(x^*) + \nabla g_I(x^*) u_I = 0$ solamente si $u_0 = 0$.
En este caso, $u_I = \alpha \mathbf{1}$ para cualquier $\alpha \in \mathcal{R}$; $\alpha > 0$ hace que se cumplan las condiciones de Fritz-John.

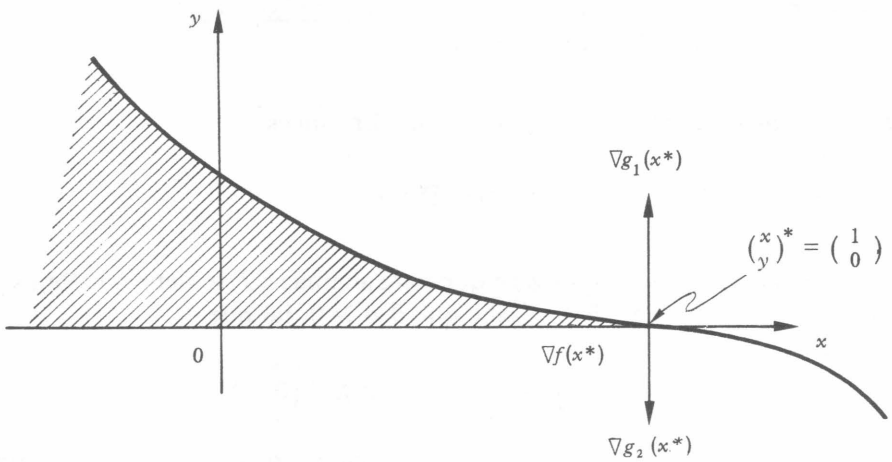


Figura 5.2

Como se podrá observar, las condiciones de Fritz-John se cumplirían en $x^* = (1, 0)^T$ sin importar cuál fuera f.

De la discusión anterior, se deriva que, en realidad, el único caso realmente útil, es cuando $u_0 > 0$, ya que si $u_0 = 0$, las condiciones de *F-J* no dan información alguna sobre lo que sucede con la función objetivo en el punto $\overline{x}$. Para poder identificar el caso en que $u_0 > 0$, se requiere, al igual que en el problema restringido por igualdades, una *condición de regularidad* sobre las restricciones de PNL. Este caso conduce a las condiciones de Karush, Kuhn y Tucker.

Para derivar dichas condiciones se utiliza un requisito de regularidad propuesto por Zangwill[47], que emplea el concepto de direcciones factibles presentado en este capítulo. Sin embargo, es menester señalar que hay varias condiciones de regularidad o *requisitos sobre las restricciones,* como también se conocen, que permiten derivar las condiciones de Kuhn y Tucker. Algunas de ellas se presentan como problemas al final de este capítulo. Por ejemplo, es fácil ver que la condición de regularidad de independencia lineal permite una derivación inmediata de dichas condiciones, a partir de las condiciones de Fritz-John. Esta derivación se deja como ejercicio para el lector.

El requisito restriccional de Zangwill

Como ya se mencionó en el párrafo anterior, el requisito restriccional que se utilizará para derivar las condiciones de Kuhn y Tucker utiliza el cono de direcciones factibles. Para hacer esto, es necesario lograr una caracterización más práctica de este conjunto.

En primer término, es importante notar que los conjuntos D y $\widetilde{D}$ dependen exclusivamente de las restricciones activas en $\overline{x}$. Debe ser obvio que si $g(\overline{x}) < 0$, entonces $D = \widetilde{D} = E^n$.

Así, examínese el Lema siguiente:

Lema 5.7: Sea $\widetilde{\Gamma}(\overline{x}) = \{d | d^T \nabla g_I(\overline{x}) \leqslant 0\}$. Entonces,

$$\widetilde{D} \subset \widetilde{\Gamma}$$

Prueba: Sea $d \in D(\overline{x})$ y supóngase que para alguna $i \in I$, se tiene que $\nabla g_i(\overline{x})^T d > 0$. Entonces, del Lema 5.1 se sabe que $\exists\ \sigma > 0$, tal que

$$g_i(\overline{x} + \lambda d) > g_i(\overline{x}) = 0 \quad \forall\ \lambda \in (0, \sigma],$$

lo cual contradice el supuesto de que $d \in D(\overline{x})$. Por lo tanto, $d \in D(\overline{x}) \Rightarrow d^T \nabla g_I(\overline{x}) \leqslant 0\ \forall\ d \in D(\overline{x})$.

Entonces, como $\widetilde{\Gamma}(\overline{x})$ es un conjunto cerrado que contiene a $D(\overline{x})$ tiene que ser cierto que $\widetilde{D}(\overline{x}) \subset \widetilde{\Gamma}(\overline{x})$. ■

Por desgracia, es posible encontrar casos en los que $\widetilde{\Gamma} \not\subset \widetilde{D}$. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 5.2: Sea $g(x) \leqslant 0$ el sistema de desigualdades especificado según:

$$\begin{aligned} g_1(x, y) &\equiv (x + y - 1)^3 \leqslant 0 \\ g_2(x, y) &\equiv -x \leqslant 0 \\ g_3(x, y) &\equiv -y \leqslant 0 \end{aligned}$$

Considérese el punto $\overline{u} = \frac{1}{2}\,1$. Nótese que la región factible $S = \{x \mid g(x) \leqslant 0\}$ especificada, en realidad es equivalente a:

$$S \equiv F = \{u \in E^2 \mid 1^T u \leqslant 1; u \geqslant 0\}$$

ya que $g_1(u)$ tiene un exponente cúbico.

Así, la región S se representa en la figura 5.3.

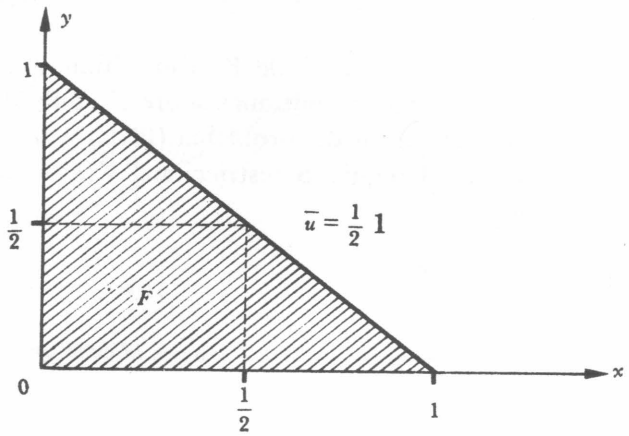


Figura 5.3

En primer término nótese que para que $d \in D$ se requiere que exista $\sigma_d > 0$, tal que

$$1^T(\overline{u} + \lambda d) \leqslant 1 \quad \forall \lambda \in [0, \sigma_d]$$

Como $\overline{u} = \frac{1}{2}\,1$, esto significa que:

$$\begin{aligned} 1^T(\tfrac{1}{2}\,1 + \lambda\, d) &= \tfrac{1}{2}\,1^T\,1 + \lambda\,1^T\,d \\ &= 1 + \lambda\,1^T d \leqslant 1 \end{aligned}$$

Es decir, $\lambda\,1^T d \leqslant 0$.

Ahora bien, $d \in E^2$ y lo anterior se traduce en

$$\lambda\,(d_1 + d_2) \leqslant 0, \text{ donde } d = (d_1, d_2)^T$$

y por lo tanto, $D = \{d \mid d_1 \leqslant -d_2\} \subset E^2$.

Ahora, nótese que la única restricción activa en $\overline{u}$ es g_1 y por lo tanto,

$$\nabla g_I(\overline{u}) = \nabla g_1(\overline{u})$$

Es decir,

$$\nabla g_I(\bar{u}) = \nabla g_I(\tfrac{1}{2}\,\mathbf{1}) = 3(1 - \tfrac{1}{2}\,\mathbf{1}^T\,\mathbf{1})\,\mathbf{1} = 0$$

Por lo tanto $\widetilde{\Gamma} = \{d \mid d^T\ \nabla g_I(\bar{u}) \leqslant 0\} = E^2$, ya que $\nabla g_I(\bar{u})^T\, d = 0, \forall\, d \in E^n$. De donde se deduce que $\widetilde{\Gamma} \not\subset \widetilde{D}$.

Sin embargo, como ya se indicó, el conjunto de restricciones representadas por el conjunto F definen la misma región S, y nótese que en este caso sí se satisface $\widetilde{\Gamma} \subset \widetilde{D}$. ■

Teorema 5.9: (Condiciones necesarias de Karush, Kuhn y Tucker) Sean f: $E^n \to \mathcal{R}$ y g: $E^n \to E^m$ funciones continuas sobre el conjunto abierto X. Entonces, si x^* es un mínimo local del problema (PNL) y f, g son diferenciables en x^*, y se cumple el requisito restriccional $\widetilde{\Gamma}(x^*) = \widetilde{D}(x^*)$, existe $\bar{u} \in E^m$; $\bar{u} \neq 0$, tal que:

$$(i) \ldots \nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\,\bar{u} = 0$$
$$(ii) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \bar{u} \geqslant 0$$
$$(iii) \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{u}^T\, g(x^*) = 0$$

Prueba: Como x^* es un punto factible, $g(x^*) \leqslant 0$. Ahora, si $\widetilde{\Gamma} = \widetilde{D}$, del corolario del teorema 5.5 se tiene que: $\Phi \cap \widetilde{\Gamma} = \phi$. Entonces el sistema

$$\nabla f(x^*)^T\, d < 0;\ d^T\ \nabla g_I(x^*) \leqslant 0$$

no tiene solución, y por el teorema de Farkas, el sistema

$$\nabla f(x^*) = -\nabla g_I(x^*)\,\bar{u}_I$$

tiene una solución $\bar{u}_I \geqslant 0$.

Así, haciendo $\bar{u}_{\bar{I}} = 0$, se tiene que:

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\,\bar{u} = 0$$

Además, como $g_I(x^*) = 0$ y $\bar{u}_{\bar{I}} = 0$, se tiene que

$$\bar{u}_I^T g_I(x^*) = 0;\ \bar{u}_{\bar{I}}^T\, g_{\bar{I}}(x^*) = 0,$$

lo cual da $\bar{u}^T\, g(x^*) = 0$. ■

Gráficamente, las condiciones de Karush, Kuhn y Tucker dicen que en el óptimo, $-\nabla f(x^*)$ no puede tener un ángulo menor de 90° con ninguna dirección factible en x^*. Esto se ilustra en la figura 5.4.

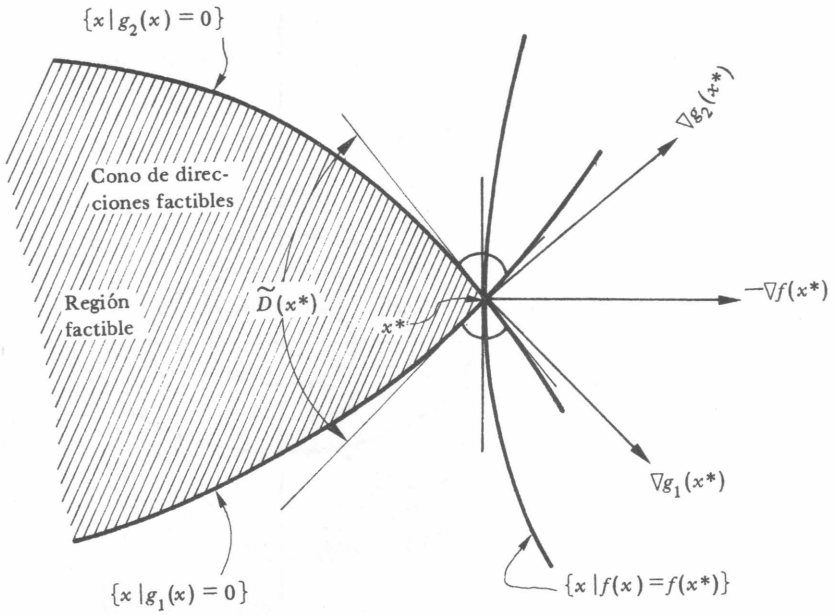


Figura 5.4 Interpretación geométrica de las condiciones de Karush, Kuhn y Tucker.

Ejemplo 5.3: Considérese el problema cuadrático siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{mín } x^T\ Vx \\ &\text{s.a.}\quad p^T x \leqslant \alpha \end{aligned}$$

donde V es una matriz positiva definida.

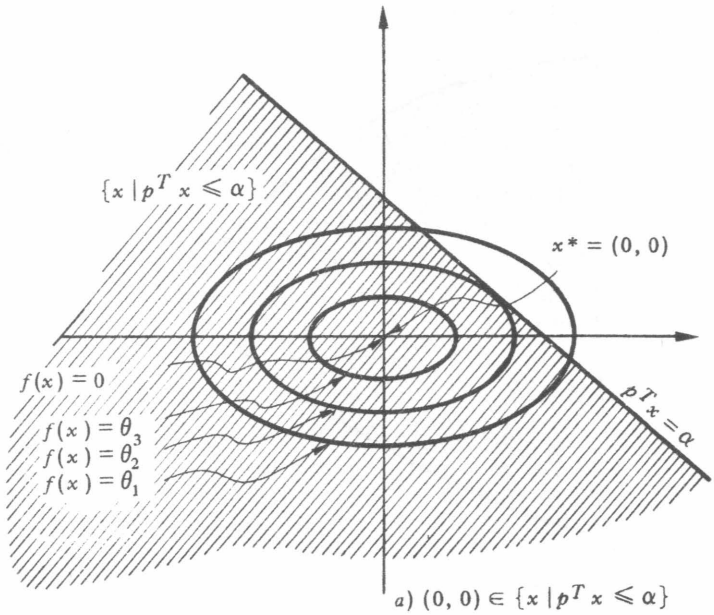
Se va a aplicar el teorema de Kuhn y Tucker para resolverlo. Para esto, es necesario reescribir el problema según:

$$\begin{aligned} &\text{mín } f(x) \equiv x^T\ Vx \\ &\text{s.a. } g(x) \equiv p^T x - \alpha \leqslant 0 \end{aligned}$$

Entonces, se deben examinar dos casos; a saber:

i) El óptimo irrestricto es también un punto factible. Para este problema, es obvio que $\nabla f(0) = 0$, y por lo tanto, $x = 0$ es el mínimo irrestricto de f. Entonces, si $\alpha \geqslant 0$; se tiene que $x = 0$ es un punto factible del problema y por lo tanto, lo resuelve. En este caso la restricción no es activa y las condiciones de Kuhn y Tucker se satisfacen trivialmente haciendo el multiplicador de Lagrange igual a cero. Esta situación se ilustra en la figura 5.5*a*.

ii) En el caso $\alpha < 0$, se tiene que la restricción tiene que ser activa en el óptimo ya que el óptimo irrestricto no es factible. Esto se ilus-



$0 < \theta_3 < \theta_2 < \theta_1$

Figura 5.5a

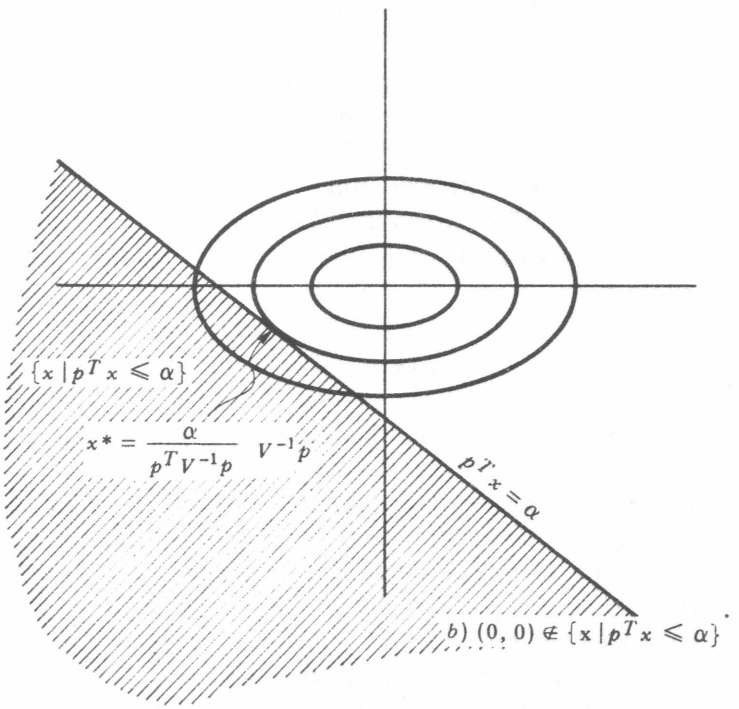


Figura 5.5b

tra en la figura 5.5 *b*. Para resolver este problema es conveniente hacer un cambio de variable; a saber:

$$y = Qx \quad \text{ó} \quad x = Q^{-1}y,$$

donde Q es una matriz tal que $V = Q^2$. Se sabe que si V es positiva definida, Q existe y es no-singular. (Véase por ejemplo [35, 42]).

Entonces, el problema se ha transformado en:

$$\begin{aligned} &\text{mín } y^T y \\ &s.a.\ q^T y \leqslant \alpha \equiv q^T y - \alpha \leqslant 0 \end{aligned}$$

donde $q = Q^{-1} p$.

$$\text{Sea } L(y, u) = y^T y + u(q^T y - \alpha)$$

$$\text{y} \qquad \nabla_y L(y, u) = 2y + uq = 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

Entonces:

$$y^* = -\frac{u}{2} q$$

Ahora, para encontrar el multiplicador u, multiplíquese (1) por q y recuérdese que, al ser activa la restricción, $q^T y = \alpha$. Con esto se obtiene:

$$2y^T q + u\, q^T q = 2\alpha + u\, q^T q$$

Es decir,

$$u^* = -\frac{2\alpha}{q^T q} = -\frac{2\alpha}{\|q\|^2}$$

Ahora, nótese que en este caso, $\alpha < 0$ y, por lo tanto, $u^* > 0$ como lo exige el teorema. Así, se tiene que:

$$y^* = \frac{\alpha}{\|q\|^2} q = \frac{\alpha}{\|q\|^2} Q^{-1} p$$

Haciendo la transformación correspondiente, $x^* = Q^{-1} y^*$, se obtiene la solución del problema original que es:

$$x^* = \frac{\alpha}{\|Q^{-1} p\|^2} [Q^{-1}]^2 p = \frac{\alpha}{p^T V^{-1} p} V^{-1} p$$

Queda al lector verificar que $V^{-1} = [Q^{-1}]^2$ y que x^* satisface las condiciones de Kuhn y Tucker del problema original. Además, es obvio que las condiciones de Fritz-John se satisfacen haciendo $u_0 = 1$, en ambos casos. ■

5.3 CONDICIONES NECESARIAS DE OPTIMALIDAD PARA PROBLEMAS CON RESTRICCIONES ESPECIFICADAS POR IGUALDADES Y DESIGUALDADES

En esta sección se derivan condiciones necesarias para el problema general de programación no-lineal, en donde el conjunto S está especificado por un conjunto de ecuaciones y un conjunto de desigualdades. Así, sean $f: E^n \to \mathcal{R}$; $g: E^n \to E^m$; $h: E^n \to E^q$. El problema general de programación no-lineal (PGNL) es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{rl} & \min f(x) \\ & x \in X \\ \text{sujeto a:} & g(x) \leqslant 0 \\ & h(x) = 0 \end{array}\right\} \equiv \text{(PGNL)}$$

Así, la función h está compuesta por funciones $h_i: E^n \to \mathcal{R}$; $i = 1, 2, \ldots, q$, de modo que $h(x) = 0$ es en realidad un sistema de ecuaciones. Al igual que en (PNL), X es un conjunto abierto.

A continuación se derivan las condiciones de Kuhn y Tucker para este problema general. Para este propósito, también debe haber un requisito restriccional, que permita aplicar la condición necesaria $F_0 \cap \Gamma = \phi$.

Así, sea $H_0 = \{d \mid d^T \nabla h(x) = 0\}$. Entonces, el requisito restriccional que se usará para derivar condiciones necesarias para optimalidad es el siguiente:

$$\Gamma = \widetilde{D} \cap H_0$$

Con esto se obtiene el resultado deseado.

Teorema 5.10: Sean $f: E^n \to \mathcal{R}$; $g: E^n \to E^m$ y $h: E^n \to E^q$. Considérese el problema general de Programación No-Lineal:

$$\left.\begin{array}{rl} & \min f(x) \\ & x \in X \\ \text{s.a.} & g(x) \leqslant 0 \\ & h(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(PGNL)}$$

Donde $X \subset E^n$ es un conjunto abierto. Al igual que para PNL la región factible se denota por $S = \{x \mid g(x) \leqslant 0; h(x) = 0; x \in X\}$

Entonces, si x^* es un mínimo local para PGNL; f, g_I y h son diferenciables en x^*, y se cumple el requisito restriccional en x^*, existen $\overline{u} \in E^m$; $\overline{v} \in E^q$, tales que

$$\begin{aligned} &i)\ \nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\,\overline{u} + \nabla h(x^*)\,\overline{v} = 0 \\ &ii)\ \ldots\ldots \qquad\qquad \overline{u} \geqslant 0 \\ &iii)\ \ldots\ldots \qquad\qquad \overline{u}^T\, g(x^*) = 0 \end{aligned}$$

Prueba: Para probar el teorema se hace notar que:

$$\{x \mid h(x) = 0\} = \{x \mid h(x) \leqslant 0\} \cap \{x \mid h(x) \geqslant 0\}$$

Así, reescríbase PGNL de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{mín } f(x) \\ &x \in X \\ &\text{s.a. } g(x) \leqslant 0 \\ &\qquad h(x) \leqslant 0 \\ &\qquad -h(x) \leqslant 0 \end{aligned}$$

Entonces, del teorema 5.5 se sabe que si x^* es un mínimo local, necesariamente' se tiene que $\Phi \cap \Gamma = \phi$. Como se ha supuesto que el requisito restriccional se cumple en x^*, esta condición se traduce en

$$\Phi \cap \widetilde{D} \cap H_0 = \phi$$

Sea A^T una matriz cuyas columnas son ∇g_I, ∇h, y $-\nabla h$, respectivamente. Entonces, la condición de optimalidad anterior se traduce en que el sistema

$$d^T A \leqslant 0; -\nabla f(x^*)^T\, d > 0$$

no tiene solución. Y el teorema de Farkas dice que el sistema

$$Ay = -\nabla f(x^*); y \geqslant 0$$

sí la tiene. Pero esto implica que existen $\overline{u}_I \in E^{m-q}$; $\alpha \in E^q$; $\beta \in E^q$, tales que $(\overline{u}_I, \alpha, \beta) \geqslant 0$ y:

$$\nabla f(x^*) + \nabla g_I(x^*)\,\overline{u}_I + \nabla h(x^*)\ \alpha - \nabla h\,(x^*)\,\beta = 0.$$

Entonces, haciendo $\overline{u}_{\overline{I}} = 0$; $\overline{v} = (\alpha\text{-}\beta)$, el resultado es obvio. ■

Nótese que en ausencia de restricciones de desigualdad g, un corolario inmediato de este teorema será precisamente el teorema de Lagrange.

5.4 SUFICIENCIA

Hasta este momento, sólo se han obtenido condiciones necesarias para que $\overline{x}$ sea una solución de PNL. Ahora se verá que bajo condiciones relativamente poco restrictivas de convexidad, las condiciones son suficientes.

Teorema 5.11 (Condiciones suficientes de K-T) Sea $X \subset E^n$ un conjunto abierto no-vacío y para (PNL) sean

$f: E^n \to \mathcal{R}$ una función pseudo-convexa en $\overline{x} \in X$
$g: E^n \to E^m$ compuesta por funciones $g_i: E^n \to \mathcal{R}$ cuasi-convexas y diferenciables en $\overline{x} \in X$.

Entonces, si se satisfacen las condiciones de *K-T* en $\overline{x}$, éste es un óptimo global de (PNL).

Prueba: Sea x una solución factible cualquiera de (PNL). Entonces:

$$g_i(x) \leqslant g_i(\overline{x}) = 0, \text{ para } i \in I$$

Ahora, por cuasi-convexidad de las funciones g_i en $\overline{x}$, para $i \in I$, se sabe que:

$$g_i(\lambda x + (1 - \lambda)\overline{x}) = g_i(\overline{x} + \lambda(x - \overline{x})) \leqslant \text{máx } \{g_i(x), g_i(\overline{x})\} = g_i(\overline{x}) = 0,$$

para cualquier $\lambda \in (0,1)$, e $i \in I$.

Esto implica que es posible moverse en la dirección $d = x - \overline{x}$ sin aumentar el valor de la función g_i; $i \in I$ y por lo tanto:

$$\nabla g_i(\overline{x})^T d \leqslant 0. \text{ Es decir,}$$

$$(x - \overline{x})^T \nabla g_I(\overline{x}) \leqslant 0 \qquad \forall x \in S \qquad \ldots\ldots (1)$$

Ahora bien, las condiciones de Kuhn y Tucker se satisfacen en $\overline{x}$ y por lo tanto, existe $\overline{u}_I \geqslant 0$, tal que:

$$\nabla f(\overline{x}) + \nabla g_I(\overline{x})\, \overline{u}_I = 0$$

$$\overline{u}_I^T g_I(\overline{x}) = 0$$

Hágase además, $\overline{u}_{\overline{I}} = 0$.
Entonces, de (1) se tiene que:

$$(x - \overline{x})^T \nabla g_I(\overline{x})\, \overline{u}_I \leqslant 0$$

Además, de (2) se tiene que $\nabla g_I(\overline{x})\,\overline{u}_I = -\nabla f(\overline{x})$ y por lo tanto:

$$\nabla f(\overline{x})^T (x - \overline{x}) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in S$$

Como f es pseudo-convexa en $\overline{x}$, lo anterior implica que

$$f(\overline{x}) \leqslant f(x) \qquad \forall\, x \in S$$

que es el resultado deseado. ■

5.5 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

En este capítulo se ha presentado lo que en la literatura se conoce como el "enfoque lagrangeano" a la teoría de optimización. Como se habrá podido observar, los teoremas de Fritz-John y las distintas variantes y acepciones de las condiciones de Karush, Kuhn y Tucker son extensiones del teorema de Lagrange para abarcar problemas de optimización más generales. También conviene aclarar que, aunque el trabajo de Kuhn y Tucker es el más conocido, fue precedido por Fritz John y por Karush. Este último hizo una derivación de las condiciones estudiadas, utilizando técnicas de cálculo de variaciones, y por razones desconocidas su trabajo corrió con una suerte semejante al de Fritz-John. Pero por esta razón es más común referirse a las condiciones mencionadas solamente como las de Kuhn y Tucker.

Por limitaciones de espacio, no se ha podido dar un tratamiento exhaustivo al tema. Sin embargo, tampoco ha sido la intención, y los resultados más importantes han sido explorados. Se piensa que el material presentado es suficiente para las aplicaciones clásicas como en la teoría económica o el diseño de algoritmos y, desde luego, como materia básica de la teoría de optimización. El lector que lo desee podrá complementar fácilmente los conceptos aquí expuestos con formas alternativas de la derivación de las condiciones de optimalidad.

En particular es importante hacer hincapié en el tema del requisito restriccional, ya que distintas condiciones de regularidad proporcionan formas alternativas de derivar las condiciones de Karush, Kuhn y Tucker. Se ha realizado un esfuerzo considerable en buscar el requisito menos restrictivo. El lector interesado queda referido a Mangasarian[31] y Bazaraa y Shetty[2] para un buen tratamiento del tema, así como los ejercicios relevantes de este capítulo.

Finalmente, es menester señalar que para aquellos lectores interesados en teoría de optimización sería conveniente abordar el tema de condiciones de segundo orden. Como texto básico puede consultarse a Luenberger[28] y posteriormente revisar la literatura especializada (vgr. [38]). En esencia, las condiciones de segundo orden vienen dadas por condiciones sobre la hessiana del Lagrangeano.

EJERCICIOS CAPITULO 5

1. Considere el problema

$$\text{mín } f(x) \equiv \| Ax - b \|^2$$

Donde es una matriz (mxn) y $b \in E^m$

a) Dé una interpretación geométrica del problema.

b) Escriba una condición necesaria para obtener la solución óptima e indique si la condición es también suficiente.

c) ¿Es única la solución óptima? Justifique su respuesta.

d) Obtenga una solución cerrada que satisfaga la condición necesaria de optimalidad. Especifique cualquier supuesto que pueda requerir.

e) Ilustre sus resultados para el ejemplo siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i.e., encuentre x^* que minimiza $\| Ax - b \|^2$.

2. Considere el problema

$$\text{máx } p^T x + e^{-x^T x}$$
$$\text{s.a. } p^T x \leqslant \alpha$$

a) Escriba las condiciones de Kuhn y Tucker para el problema.

b) Dé condiciones para que el óptimo del problema sea el óptimo irrestricto de la función.

c) Dé condiciones para que el óptimo del problema implique que la restricción es activa en dicho punto.

d) Cuál es la solución óptima en ambos casos y diga si se trata de óptimos locales o globales.

3. Considere el problema:

$$\text{mín } q^T x + \tfrac{1}{2} x^T Qx$$
$$\text{s.a. } a^T x \leqslant \beta; \beta > 0; Q < 0.$$

a) Escriba las condiciones de Kuhn y Tucker para este problema. ¿Son suficientes o sólo necesarias?

b) Proporcione condiciones para que x^* satisfaga las condiciones de Kuhn y Tucker y que la restricción no sea activa.
c) Proporcione condiciones para que x^* satisfaga las condiciones y la restricción sea activa.
d) Encuentre una expresión cerrada para el óptimo en ambos casos.

4. Considere el problema

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{x_j} \\ \text{s.a.} \quad & a^T x = b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}$$

a) Escriba las condiciones de Kuhn y Tucker para este problema. ¿Son suficientes o solamente necesarias?
b) Dé una expresión cerrada para un punto que satisfaga dichas condiciones.

5. Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} & \text{mín } p^T x \\ & \text{s.a. } q^T x + \tfrac{1}{2} x^T Q x \leqslant \alpha; \text{ donde } Q > 0 \end{aligned}$$

a) Escriba las condiciones de Kuhn y Tucker para el problema. ¿Son suficientes o sólo necesarias?
b) Encuentre una expresión cerrada para un punto que satisfaga las condiciones de K-T.

6. Considérese el problema:

$$\begin{aligned} & \text{máx } e^{-x^T x} \\ & \text{s.a. } \alpha \leqslant p^T x \leqslant \beta; \text{ donde } \alpha < \beta \end{aligned}$$

a) Escriba las condiciones de Kuhn y Tucker para este problema. ¿Son suficientes las condiciones o solamente necesarias?
b) Dé condiciones para que un punto satisfaga las condiciones de Kuhn y Tucker sin que ninguna restricción sea activa.
c) Dé condiciones para que el punto que satisface las condiciones de K-T haga activa la restricción.
   i) En su cota inferior
   ii) En su cota superior
d) Obtenga una expresión cerrada para los puntos que satisfacen las condiciones de Kuhn y Tucker, en todos los casos anteriores.

7. Demuestre que la función.

$$\theta(u) = \text{mín } (1-u)^T x$$
$$\text{s.a. } ||x||^2 \leqslant 1$$

es una función cóncava en u.

Los tres problemas siguientes conducen a la obtención de métodos numéricos (algoritmos) para resolver PNL.

8. Considérese el problema:

$$\text{mín } f(x)$$
$$\text{s.a. } Ax \leqslant b$$

donde f es una función convexa y diferenciable sobre E^n, A es una matriz de $(m \times n)$ y b es un vector de "m" componentes.

Suponga que $\overline{x}$ es una solución factible, tal que:

$$A_a \overline{x} = b_a$$
$$A_n \overline{x} < b_n$$

donde $A = \left[\frac{A_a}{A_n}\right]$; $b = \left(\frac{b_a}{b_n}\right)$

Suponga que A tiene rango completo, es decir, todas sus filas son linealmente independientes, entonces la matriz P que *proyecta* cualquier vector $y \in E^n$, sobre el *espacio nulo* de A_a:

$$N = \{y \mid A_a y = 0\}$$

viene dada por:

$$P = I - A_a^T (A_a A_a^T)^{-1} A_a$$

a) Demuestre que P tiene las propiedades siguientes:

i) $P = P^T$

ii) $P = P^2 = P^n; n = 1, 2, 3, \ldots$

iii) $P > 0$

b) Sea $\overline{d} = -P \nabla f(\overline{x})$. Demuestre que si $\overline{d} \neq 0$, entonces $\exists\, \delta > 0$, tal que

$$\left.\begin{array}{l} f(\overline{x} + \tau\overline{d}) < f(x) \\ A(\overline{x} + \tau\overline{d}) \leqslant b \end{array}\right\} \quad \forall\ \tau \in (0, \delta)$$

c) Demuestre que si $\bar{d} = 0$, entonces $\bar{x}$ satisface las condiciones de Kuhn y Tucker. Interprete geométricamente esta condición.

9. Para el problema (PNL) de programación no-lineal:

$$\begin{aligned} &\text{mín } f(x) \\ &\text{s.a. } g_i(x) \leqslant 0 \quad i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

Sea $\bar{x}$ un punto factible e $I = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}$ y suponga que todas las funciones son convexas y diferenciables.
Considere el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} &\text{mín } \nabla f(\bar{x})^T d \\ &\text{s.a. } \nabla g_i(\bar{x})^T d \leqslant 0 \quad \forall\, i \in I \\ &\qquad \| d \| \leqslant 1 \end{aligned}$$

Supóngase que $\bar{d}$ resuelve el problema y sea

$$\bar{z} = \nabla f(\bar{x})^T \bar{d}$$

a) Demuestre que $\bar{z} \leqslant 0$;

b) Demuestre que si $\bar{z} < 0$; entonces $\bar{d}$ es una dirección factible tal que $\exists\ \delta > 0$, para la cual:

$$\left.\begin{aligned} &f(\bar{x} + \tau d) < f(\bar{x}) \\ &\text{y } \ g_i(\bar{x} + \tau d) \leqslant g_i(\bar{x})\ \forall i \end{aligned}\right\} \quad \forall\ \tau \in (0, \delta)$$

c) Demuestre que si $\bar{z} = 0$, entonces $\bar{x}$ satisface las condiciones de Kuhn y Tucker.

10. Considere el problema

$$\begin{aligned} &\text{mín } f(x) \\ &\text{s.a. } x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Demuestre que x^* es un óptimo si y sólo si, la dirección d, definida según:

$$d_i = \begin{cases} -\dfrac{\partial f}{\partial x_i} & \text{si } x_i > 0 \quad \text{ó} \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_i} < 0 \\ 0 & \text{si } x_i = 0 \quad \text{y} \quad \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \geqslant 0 \end{cases}$$

es $d = 0$

Suponga que f es una función convexa y diferenciable.

11. Demuestre que si x^* satisface las condiciones de Fritz-John y los gradientes de las restricciones $\nabla g_i(x^*)$ para $i \in I$ son linealmente independientes, entonces x^* también satisface las condiciones de Kuhn y Tucker. El supuesto de independencia lineal, es una condición de regularidad igual a la utilizada en el teorema de Lagrange.
12. En la literatura hay varias maneras alternativas para derivar las condiciones de Kuhn y Tucker, utilizando el concepto del CONO TANGENTE. Hay quienes lo definen como:

A. El "cono de tangentes" del conjunto S en el punto $\bar{x} \in S$ es el conjunto

$$T = \{d \mid d = \lim_{k \to \infty} \lambda_k \ (x^k - \bar{x})\}$$

donde las sucesiones $\{\lambda_k\} \subset \mathcal{R}$; $\{x^k\} \subset S$ son tales que $\lambda_k > 0$ $\forall k$ y $x^k \to \bar{x}$ cuando $k \to \infty$.

Alternativamente, lo definen como:

B. $T = \{d \mid x^k = \bar{x} + \lambda_k d + \lambda_k \theta(\lambda_k) \in S \ \forall \ k\}$

donde $\{\lambda_k\} \subset \mathcal{R}$; $\lambda_k > 0 \ \forall \ k$ y

θ: $\mathcal{R} \to E^n$ es tal que $\theta(\lambda) \to 0$, cuando $\lambda \to 0$.

a) Demuestre la equivalencia de las definiciones, e interprete geométricamente al conjunto.
b) Demuestre que T es un cono cerrado.

13. Sea $S \subset E^n$ un conjunto no vacío y sea $\bar{x}$ un punto interior de S. Demuestre que $T = E^n$.
14. Sea $S = \{x \mid g(x) \leqslant 0; x \in X\} \subset E^2$
tal que:

$$g(x) = x^T x - 1$$

$$X = \{x \mid x = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i C_i; \lambda_i \geqslant 0 \ \forall_i; \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1\}$$

Con $C_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $C_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

a) Encuentre $T(\bar{x})$ y $D(\bar{x})$ en $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
b) Verifique que $T(\bar{x}) = D(\bar{x}) = \Gamma(\bar{x})$.

c) Exprese el conjunto X por medio de un conjunto de desigualdades. Identifique el conjunto I de restricciones activas en $\bar{x}$. Repita el inciso *b*).

15. Demuestre el teorema siguiente:

Sea $S \subset E^n$ un conjunto no vacío y f: $E^n \to \mathcal{R}$ una función diferenciable en $\bar{x} \in S$. Sea $\Phi(\bar{x}) = \{d \mid \nabla f(\bar{x})^T d < 0\}$. Entonces, si $\bar{x}$ es un mínimo local de f sobre S, se tiene que $T \cap \Phi(\bar{x}) = \emptyset$.

Sugerencia: Use la definición (A) del cono tangente y recuerde que $f(x^k) - f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x})^T (x^k - \bar{x}) + \|x^k - \bar{x}\| \alpha(\bar{x}; x^k - \bar{x})$, donde:

$\alpha(\bar{x}; x^k - \bar{x}) \to 0$, cuando $x^k \to \bar{x}$. Además, al ser $\bar{x}$ un óptimo local, existe $\bar{k}$ tal que $f(x^k) - f(\bar{x}) \geqslant 0 \ \forall \ k \geqslant \bar{k}$. Esto implica que

$$\nabla f(\bar{x})^T d \geqslant 0, \text{ para } d \in T.$$

16. Derivación de las condiciones de Kuhn y Tucker con el *requisito restriccional de Abadie.*

Sea $\Gamma(\bar{x}) = \{d \mid \nabla g_I(\bar{x})^T d \leqslant 0\}$,
entonces el requisito restriccional de Abadie dice que $T = \Gamma(\bar{x})$.
¿Cuál es la diferencia entre éste y el de Zangwill visto en el texto?

Teorema: Condiciones necesarias de Kuhn y Tucker. Considere el problema (PNL) de minimizar $f(x)$ sujeto a $g(x) \leqslant 0$, donde f: $E^n \to \mathcal{R}$ y g: $E^n \to E^m$. Supóngase que f y g son diferenciables en $\bar{x}$ y que $T = \Gamma(\bar{x})$. Entonces, si $\bar{x}$ es un mínimo local de (PNL), existe $u_I \geqslant 0$, tal que:

i) $\nabla f(\bar{x}) + \nabla g_I(\bar{x})\, u_I = 0$
ii) $u_I^T g_I(\bar{x}) = 0$

Demuestre el teorema utilizando el teorema del ejercicio anterior y el teorema de Farkas.

17. *El requisito restriccional de Kuhn y Tucker.* El requisito restriccional de Kuhn y Tucker se cumple en $\bar{x} \in \{x \mid g(x) \leqslant 0\} = S$, si dado

$d \in \widetilde{D}(\bar{x})$ existe una función continua ϕ: $\mathcal{R} \to E^n$ con las propiedades siguientes:

a) Existe $\sigma > 0$, tal que $\phi(\tau) \in S \ \forall \ \tau \in [0,\sigma]$

b) $\phi(0) = \bar{x}$

c) $\lim_{\tau \to 0+} \dfrac{\phi(\tau) - \phi(0)}{\tau} = d$

donde $\tau \to 0^+$ significa que el límite se toma sobre valores positivos de τ.

Demuestre que si $\bar{x}$ es un mínimo local de (PNL) con f y g diferenciables en $\bar{x}$, y se satisface el requisito restriccional de Kuhn y Tucker en $\bar{x}$, entonces se satisfacen las condiciones de Kuhn y Tucker en $\bar{x}$.

Sugerencia: Como $\bar{x} = \phi(0)$ es un mínimo, tómese la expansión de Taylor en $\bar{x}$ para $d \in \widetilde{D}(\bar{x})$ y τ pequeña:

$$f[\bar{x} + \theta(\phi(\tau) - \phi(0))] - f(\bar{x}) =$$
$$\nabla f[\bar{x} + \theta(\phi(\tau) - \phi(0))]^T \ [\phi(0)]^T \ [\phi(\tau) - \phi(0)] \geqslant 0,$$

para alguna $\theta \in [0,1]$. Entonces, dividiendo entre τ y tomando el límite correspondiente, se obtiene $\nabla f(\bar{x})^T \ d \geqslant 0$, para $d \in \widetilde{D}(\bar{x})$. ¿Esto qué demuestra?

18. Obtenga condiciones de suficiencia de Kuhn y Tucker para (PNL) suponiendo convexidad y diferenciabilidad de todas las funciones, sin utilizar el hecho de que convexidad implica pseudo-convexidad y cuasi-convexidad.
19. ¿Puede obtener condiciones de suficiencia para (PGNL) suponiendo que f es pseudo-convexa, que g es cuasi-convexa y que h es cuasimonotónica, de modo que $\{x \mid h(x) = 0\} = \{x \mid h(x) \geqslant 0\} \cap \{x \mid h(x) \leqslant 0\}$ (véase el ejercicio 6 del capítulo 4), es aceptable para obtener el resultado? Si no es posible, dé un contraejemplo.
20. Condiciones suficientes para conjuntos con "forma de estrella".
Considérese la definición siguiente:
Se dice que el conjunto S tiene "*forma de estrella*" en $\bar{x} \in S$, si $\lambda y + (1 - \lambda) x \in S; \lambda \in (0, 1), y \in S$.
Ahora, supóngase que $\bar{x}$ satisface las condiciones de Kuhn y Tucker para (PNL) y que f es pseudo-convexa. Demuestre que:

a) Si S tiene forma de estrella en $\bar{x}$, entonces es un mínimo global de (PNL) y por lo tanto, las condiciones de Kuhn y Tucker son suficientes.
b) Si S tiene forma de estrella en un punto $\bar{x} \in S$ no necesariamente es un conjunto convexo.

21. Los siguientes problemas aparecen en la teoría de Finanzas:

$$\text{PMI} \equiv \begin{cases} \text{mín } x^T Vx \\ \text{s.a. } \mu^T x \geqslant \gamma \\ \quad 1^T x = 1 \\ \quad g(x) \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{PMR} \equiv \begin{cases} \text{máx } \dfrac{\mu^T x - \alpha}{\sqrt{x^T Vx}} \\ \text{s.a. } 1^T x = 1 \\ \quad g(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

donde $V > 0$; $\alpha, \gamma \in R$; $g: E^n \to E^m$.

Nótese que la función objetivo de PMI es una forma cuadrática, mientras que la de PMR es bastante más complicada, aunque es pseudo-cóncava (ejercicio 4.19*a*)).

a) Demuestre el teorema siguiente:

i) Si x^* satisface las condiciones de Kuhn y Tucker para PMI, y el multiplicador de Lagrange β asociado a la restricción $\mu^T x \geqslant \gamma$ es distinto de cero, entonces x^* también satisface las condiciones de Kuhn y Tucker de PMR para

$$\alpha = \gamma - \frac{2\sigma^2(x^*)}{\beta}$$

donde $\sigma^2(x^*) = (x^*)^T Vx^*$.

ii) Si x^* satisface las condiciones de kuhn y Tucker de PMR, entonces también satisface las condiciones de Kuhn y Tucker de PMI para $\gamma = \mu^T x^*$, si $\gamma \neq \alpha$.

Sugerencia: Ponga cada problema en el formato mín $f(x)$, s.a. $g(x) \leqslant 0$; $h(x) = 0$. Plantee las condiciones de Kuhn y Tucker para cada problema y encuentre una correspondencia entre los multiplicadores de Langrange de cada problema.

b) ¿Qué requisitos se deben cumplir para garantizar que x^* es un óptimo global de los respectivos problemas?

c) En base a lo anterior, comente sobre la relación de equivalencia que existe entre estos problemas.

6 *Dualidad y optimalidad de puntos de silla*

6.1 EL DUAL DEL PROBLEMA DE PROGRAMACION NO-LINEAL

El concepto de dualidad surge con regular frecuencia en matemáticas. En abstracto, a cada "objeto matemático" corresponde otro "objeto matemático" que tiene ciertos elementos en común con el original. La conveniencia del concepto es que muchas veces es posible estudiar más fácilmente el objeto original a través de su dual. También sucede que el estudio del dual complementa y agrega información sobre el problema original. En programación matemática aparece el concepto en forma natural y tiene mucha importancia tanto teórica como práctica. Además, pueden haber varios "duales", y en programación no-lineal el que más interés ha despertado es el "Lagrangeano", originalmente estudiado y desarrollado por Dorn,[9] Mangasarian,[30] Stoër[43] y Wolfe.[46] Este dual, aparte de contribuir en forma importante a la caracterización de puntos óptimos, tiene una interpretación económica que se ha hecho clásica dentro de la literatura.

Considérese el problema general de programación no-lineal, al cual se le llamará "primal":

Problema primal (P) Minimizar $f(x)$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a: } & g(x) \leqslant 0 \\ & h(x) = 0 \\ & x \in X \end{aligned}$$

donde $g: E^n \to E^m$; $h: E^n \to E^p$; $f: E^n \to \mathcal{R}$; $X \subset E^n$

Entonces, un problema dual viene dado por el siguiente *problema dual Lagrangeano (D).*

Maximizar $\theta(u, v)$, sujeto a $u \geqslant 0$

$$\text{donde: } \theta(u, v) = \inf_{x} \{f(x) + u^T g(x) + v^T h(x) \mid x \in X\}$$

Nótese que la función "Lagrangeana dual" $\theta(u, v)$ puede tomar el valor de $-\infty$ para alguna pareja (u, v) y que en el dual las restricciones $g(x)$ y $h(x)$ han sido incorporadas a la función objetivo mediante multiplicadores de Lagrange u, v respectivamente. Además, los multiplicadores asociados a las restricciones $g(x) \leqslant 0$ están restringidos a no-negatividad, mientras que los que están asociados a las $h(x)$ no tienen restricciones de signo. Finalmente, nótese que el dual es en realidad un problema "maximin", ya que se trata de maximizar el ínfimo de una función. Por esta última razón también se le conoce a veces como el "problema dual máx-mín".

También es necesario hacer notar que a un cierto problema primal, pueden haber varios duales lagrangeanos asociados, dependiendo de cuáles restricciones se manejan como $g(x) \leqslant 0$; $h(x) = 0$ y cuáles son tomadas en cuenta por el conjunto X. Dicha elección afecta el esfuerzo requerido para evaluar la función θ, al resolver el problema dual. Por lo tanto, una adecuada elección del conjunto X, dependerá de la estructura del problema.

6.2 INTERPRETACION GEOMETRICA DEL PROBLEMA DUAL

El dual Lagrangeano tiene una interpretación geométrica que se verá a continuación. Por razones de simplificación y sin perder generalidad, se considera un ejemplo con una sola restricción de desigualdad $g(x) \leqslant 0$ y se supondrá que no existen restricciones de estricta igualdad. Así, el primal será:

$$\begin{aligned} &\text{Mín } f(x) \\ &\text{s. a. } g(x) \leqslant 0 \\ &\qquad x \in X \end{aligned}$$

Ahora, sea $G = \{(w, z) \mid w = g(x); z = f(x); x \in X\}$, de manera que G es la imagen de X bajo el mapeo (g, f). El problema primal pide encontrar un punto en G, tal que $w \leqslant 0$ y que minimice z. En el plano (w, z), esto significa encontrar un punto en G a la izquierda del eje "z", cuya ordenada al origen sea mínima. Esto se ilustra en la figura 6.1, y obviamente el punto óptimo es (w^*, z^*) mostrado en la figura.

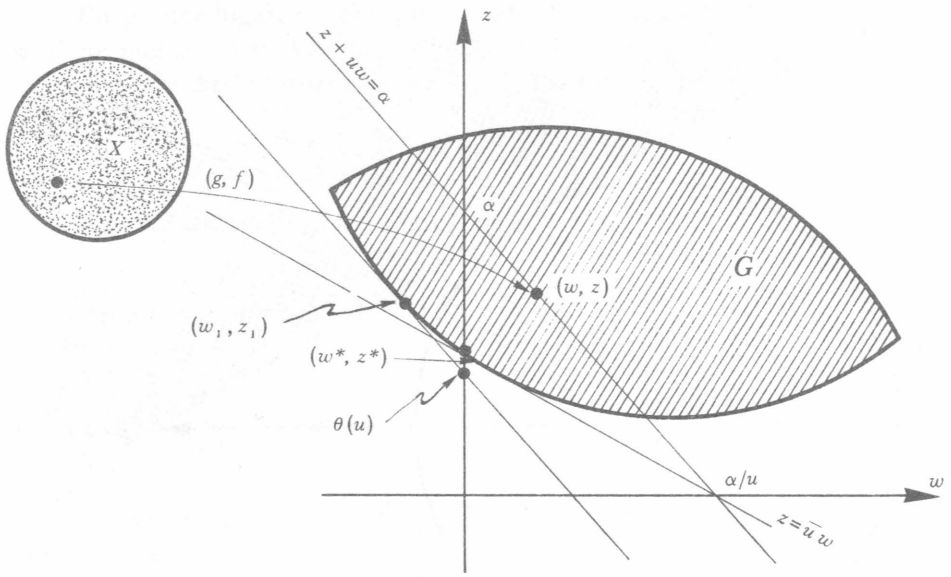


Figura 6.1.

Ahora, supóngase que $u \geqslant 0$ es un cierto número dado. Para encontrar $\theta(u)$ se requiere el mínimo de $f(x) + u\, g(x)$ sobre toda $x \in X$. Entonces, si $w = g(x)$ y $z = f(x)$ para $x \in X$, se quiere minimizar $z + uw$ sobre cualquier pareja $(z, w) \in G$. Esto equivale a deslizar la línea $z + uw = \alpha$, en forma paralela a sí misma lo más "abajo" posible, de modo que ésta "soporte" a G. Así, la línea es tangente a G en el punto (w_1, z_1) y $\theta(u)$ es la ordenada al origen donde la línea intersecta el eje z. (Nótese que ahí es donde $w = 0$).

Así, el problema dual se puede interpretar como: encontrar la pendiente del hiperplano de soporte al conjunto G, cuya ordenada z al origen sea máxima. En la figura 6.1 este hiperplano pasa por (w^*, z^*) y su pendiente es $-u^*$ y $\theta(u^*) = z^*$. Además, nótese que las funciones objetivo del dual y el primal tienen el mismo valor en el óptimo.

Ejemplo 6.1 Considérese el problema de programación no-lineal siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Mín } x^T x \\ \text{s. a. } p^T x \leqslant \alpha \end{array}\right\} \quad (P)$$

Supóngase que α y p son tales que la solución óptima viene dada por:

$$x^* = \frac{\alpha}{\|p\|^2}\, p$$

(vgr. $\alpha < 0$) y se tiene una situación como la que se muestra en la figura 6.2.

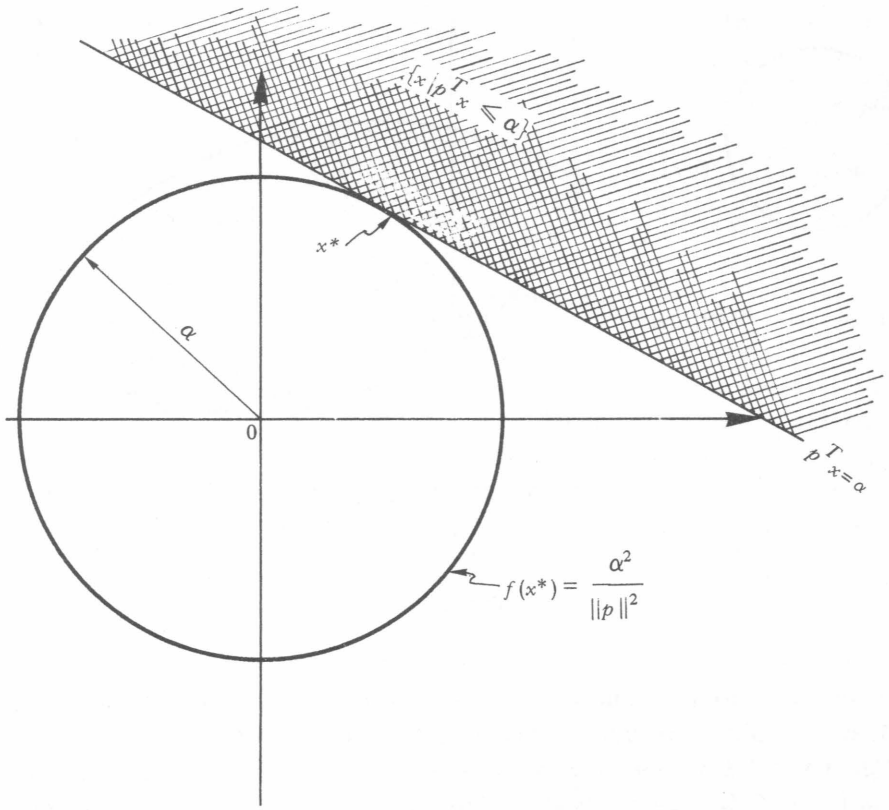


Figura 6.2

Véase ahora cómo se comporta la función dual. Sean $g(x) = p^T x - \alpha$; $X \equiv \{x \mid x \geqslant 0\}$; entonces la función dual es:

$$\theta(u) = \inf_{x \in X} \{x^T x + u(p^T x - \alpha)\}$$

$$\text{i.e. } \theta(u) = \inf_{x \in X} \{x^T x + u\, p^T x\} - \alpha\, u$$

Tomando la derivada e igualando a cero, se obtiene:

$$2x + up = 0 \Rightarrow x^* = -\frac{u}{2}\, p$$

y por lo tanto, $\theta(u) = \dfrac{u^2}{4}\, p^T p + up^T(-\dfrac{u}{2}p) - \alpha u$

Con un poco de manipulación algebraica se obtiene:

$$\theta(u) = -(\frac{u}{2}\|p\|)^2 - \alpha u$$

En primer lugar, nótese que si $u \geqslant 0$ y $p \leqslant 0$, entonces, necesariamente se tiene que $x^* \geqslant 0$. Además, es importante recordar que $\alpha < 0$ y por lo tanto, la función dual se puede escribir de la manera siguiente:

$$\theta(u) = |\alpha| u - \left(\frac{\|p\|}{2} u\right)^2$$

Así, la función dual se comporta como se observa en la figura 6.3.

Ahora, nótese que $\max_{u \geqslant 0} \theta(u) = \left(\frac{\alpha}{\|p\|}\right)^2 = \theta(u^*)$

cuando $u^* = \frac{2|\alpha|}{\|p\|^2}$ y que $\theta(u^*) = f(x^*)$.

Finalmente, por razones de consistencia analícese el problema en el plano w-z. Sean.

$$w = g(x); \quad z = f(x)$$

Se requiere encontrar la región "G" de la cual se ha hablado en la sección anterior. Es decir, hay que encontrar la región "G" sobre el plano w-z, que

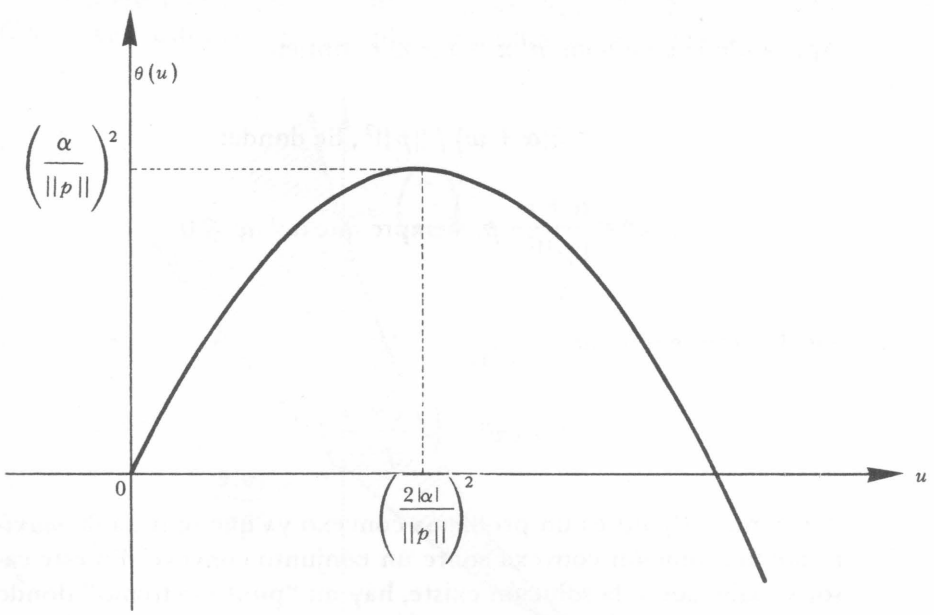


Figura 6.3

representa la imagen del conjunto $X = \{x \mid x \geqslant 0\}$, bajo el mapeo (g, f). Esto se hará derivando expresiones explícitas para las envolventes superior e inferior de G y que serán denotadas por ϕ y ψ respectivamente (nótese que en un caso $z = \phi(w)$ y en el otro, $z = \psi(w)$).

Dado w, $\phi(w)$ y $\psi(w)$ son los valores óptimos de la función objetivo de los problemas P_1 y P_2 siguientes:

$$\overbrace{\begin{aligned} \phi(w) = \text{mín } & x^T x \\ \text{s.a. } & p^T x - \alpha = w \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}}^{P_1} \qquad \overbrace{\begin{aligned} \psi(w) = \text{máx } & x^T x \\ \text{s.a. } & p^T x - \alpha = w \\ & x \geqslant 0 \end{aligned}}^{P_2}$$

i) Nótese que P_1 es un problema convexo y se puede utilizar el teorema de Kuhn y Tucker para resolverlo:

$$L(x, \lambda) = x^T x - \lambda\,(p^T x - \alpha - w)$$

$$\nabla_x L(x, \lambda) = 2x - \lambda p = 0$$

$$\text{i.e. } x^* = \frac{\lambda}{2} p$$

Aplicando la condición $p^T x = \alpha + w$ se obtiene

$$\lambda = 2(\alpha + w) \,/\, \|p\|^2, \text{ de donde:}$$

$$x^* = \frac{\alpha + w}{\|p\|^2}\, p, \text{ siempre que } \alpha + w \leqslant 0$$

Finalmente se obtiene

$$\phi(w) = \left(\frac{\alpha + w}{\|p\|} \right)^2$$

ii) Por contra, P_2 *no* es un problema convexo ya que se trata de *maximizar* una función convexa sobre un conjunto convexo. En este caso, se sabe que si la solución existe, hay un "punto extremo" donde f toma su valor máximo. En este ejemplo aparte del cero, los puntos extremos son de la forma:

$$\hat{x}_i = \tau_i\, e_i \;;\quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

donde e_i es el vector unitario correspondiente, y

$$\tau_i = \frac{\alpha + w}{p_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Entonces, si p_k es tal que $|p_k| = \min_i \{ |p_i| \mid p_i < 0 \}$

Se tiene que $x^*(w) = \dfrac{\alpha + w}{p_k}\, e_k$

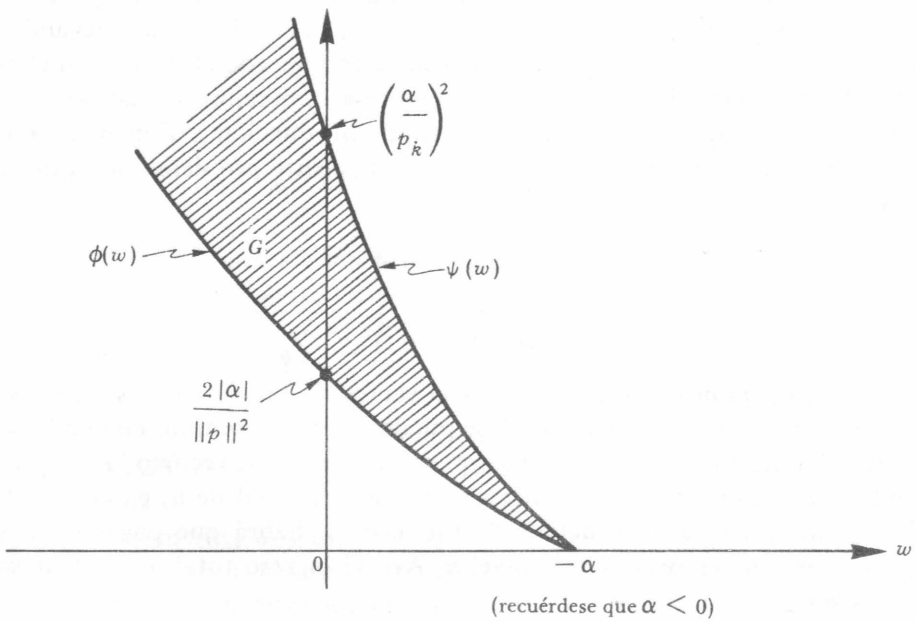
Además, como se ha supuesto $p \leqslant 0$, lo anterior también exige $\alpha + w \leqslant 0$ (i.e. $w \leqslant -\alpha$), con lo que se tiene que:

$$\psi(w) = f(x^*(w)) = \left(\frac{\alpha + w}{p_k} \right)^2$$

Con esto se obtiene el conjunto G deseado; a saber:

$$G \equiv \left\{ (w, z) \;\middle|\; \left(\frac{\alpha + w}{\|p\|} \right)^2 \leqslant z \leqslant \left(\frac{\alpha + w}{p_k} \right)^2 ; w \leqslant -\alpha \right\}$$

Nótese que necesariamente $\|p\| \geqslant |p_k|$, con lo que se garantiza que $G \neq \emptyset$. Con esto, la región queda como se muestra en la figura 6.4.



(recuérdese que $\alpha < 0$)

Figura 6.4

Nótese que en $w = 0$ se tiene que $z^* = \phi(0)$ es igual a

$$\left(\frac{\alpha}{\|p\|}\right)^2 = f(x^*) = \theta(u^*),$$

y el argumento geométrico se reproduce exactamente en este ejemplo. ■

6.3 UNA INTERPRETACION ECONOMICA DEL LAGRANGEANO Y DEL PROBLEMA DUAL

Considérese el caso de una empresa en un mercado competitivo, que requiere "m" materias primas y cuyo producto está representado por $x \in E^n$. Es decir, la componente x_j del vector x, representa el nivel de producción del bien j producido por la empresa. Sea $b \in E^m$ el vector de existencias de recursos con que cuenta la empresa; es decir, la empresa cuenta con b_i unidades del recurso i, para poder operar la fábrica ($i = 1, 2, \ldots m$). Supóngase además, que para alcanzar el nivel de producción x, se requieren $g_i^t(x)$ unidades del recurso i.

Defínase $g(x) = b - g^t(x)$, donde g: $E^n \to E^m$.

Así, cuando $g_i(x) > 0$, se tiene un excedente del recurso i. Si por el contrario, $g_i(x) < 0$, entonces no hay suficiente cantidad del recurso i para producir al nivel x; habrá que "comprar" más en el mercado.

Como el "vendedor" del recurso trata de obtener el máximo posible de utilidades (al igual que la empresa), mientras $g_i(x) < 0$, seguirá elevando el precio incluso hasta $+\infty$ si la empresa sigue comprando el recurso en el que tiene déficit. Pero, si el objetivo de la empresa es maximizar ingresos, y los ingresos de la empresa por operar al nivel de producción x vienen representados por $f(x)$, la empresa debe resolver el siguiente problema de optimización:

$$\left.\begin{array}{c} \max f(x) \\ x \\ \text{s.a } g(x) \geqslant 0 \end{array}\right\} \quad \ldots (P)$$

Ahora supóngase que $u \in E^n$ es el vector de precios de los recursos en el mercado; es decir, el recurso "i" se puede vender o comprar en el mercado al precio unitario u_i. Entonces, cualquier excedente del recurso "i" se puede vender en el mercado, obteniendo un ingreso adicional de $u_i\, g_i(x) > 0$. Por el contrario, en caso de déficit de un recurso, habrá que pagar un costo $u_i g_i(x)$ para poder producir al nivel x. Así, el ingreso total por producir al nivel x será

$$L(x, u) = f(x) + u^T g(x)$$

Ahora, analícese "el mercado". Este paga $f(x)$ por la producción y además $u_i g_i(x)$ por cualquier excedente del recurso i. Así, el costo total que el mercado paga cuando la empresa produce al nivel x, es también:

$$L(x, u) = f(x) + u^T g(x)$$

Obviamente, hay un conflicto, ya que el mercado quiere que $L(x, u)$ sea lo más pequeño posible, mientras que la empresa quiere lo contrario; que $L(x, u)$ sea el mayor posible.

Sin embargo, nótese que la empresa sólo controla el nivel de producción x, mientras que el mercado controla los precios, u; ninguno de los dos tiene el control de ambos. Así, en esta situación hipotética, en cuanto la empresa anuncie su nivel de producción $\overline{x}$, el mercado buscará un nivel de precios u tal, que

$$L_*(\overline{x}) = \min_{u \geqslant 0} L(\overline{x}, u)$$

Por contra, si el mercado se compromete a un nivel de precios unitarios $\overline{u}$ por los recursos necesarios para la producción, la empresa buscará un nivel de producción $\overline{x}$ tal que.

$$L^*(\overline{u}) = \max_{x \in X} L(x, \overline{u})$$

El mercado alcanzará un estado estable en el caso en que exista un punto $(\overline{x}, \overline{u})$, tal que

$$L^*(\overline{u}) = L(\overline{x}, \overline{u}) = L_*(\overline{x}) \ldots (*)$$

Esto significa que si cada participante actúa en forma "egoísta" y ajusta su decisión en el momento en que el otro anuncia su política, eventualmente el sistema tenderá a un nivel de "producto-precios" $(\overline{x}, \overline{u})$ tal que la relación anterior (*) se cumple. ■

6.4 PUNTOS DE SILLA

Intuitivamente, una función $h(x, y)$: $E^n \times E^m \to \mathcal{R}$ tiene un punto de silla en $(\overline{x}, \overline{y})$ si al "moverse" en la dirección x a partir del punto, resulta que el punto es un mínimo, mientras que al moverse en la otra dirección y, resulta que el punto es un máximo. Esto se ilustra en la figura 6.5

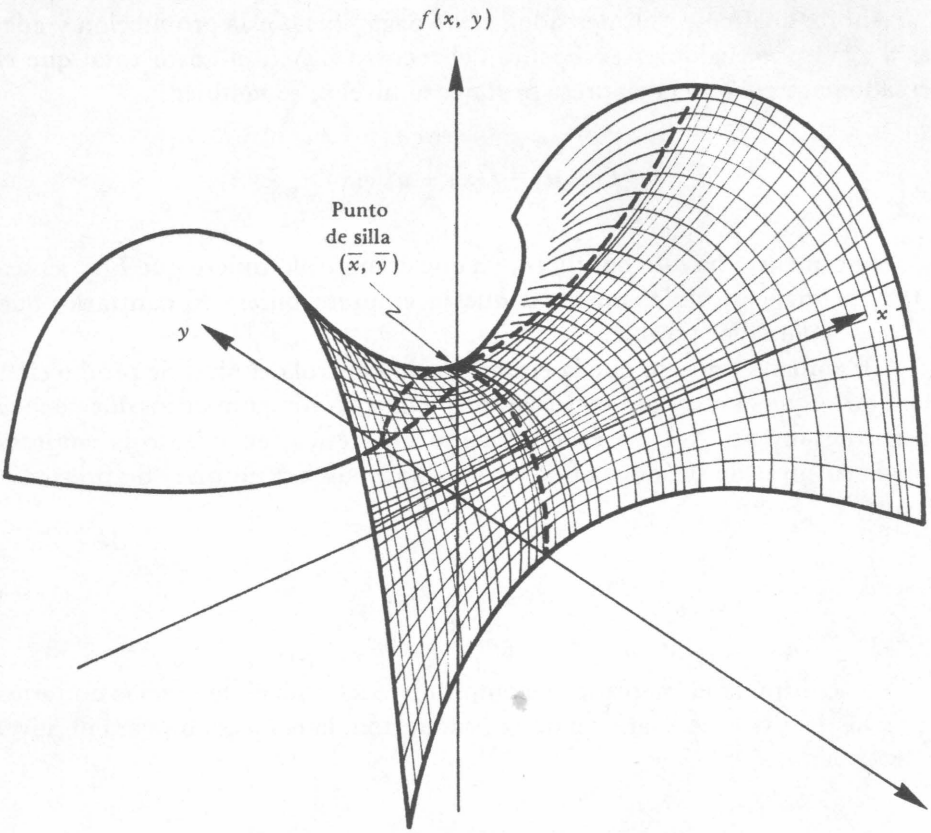


Figura 6.5

Definición: Se dice que una función $h: X \times Y \to \Re$ tiene un punto de silla en $(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$, si:

$$h(x, \overline{y}) \geqslant h(\overline{x}, \overline{y}) \geqslant h(\overline{x}, y) \quad \forall\ (x, y) \in X \times Y,$$

donde X y Y son conjuntos arbitrarios en E^n y E^m, respectivamente.

Defínanse además las funciones siguientes:

$$h_*(y) = \inf_{x \in X} h(x, y)$$

$$h^*(x) = \sup_{y \in Y} h(x, y)$$

Entonces, cuando h tiene un punto de silla, siempre será cierto que

$$h_*(y) \leqslant h(x, y) \leqslant h^*(x)$$

y por lo tanto, $h^*(x) \geqslant h_*(y) \quad \forall\ x \in X; y \in Y.$

Así, se pueden definir puntos de silla a través de estas funciones por medio del lema siguiente.

Lema 6.1: Las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) $\max_{y \in Y} \inf_{x \in X} h(x, y) = \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} h(x, y)$

b) si $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto de silla, entonces:

$$h_*(\bar{y}) = h^*(\bar{x})$$

c) $h(x, \bar{y}) \geqslant h(\bar{x}, \bar{y}) \geqslant h(\bar{x}, y) \quad \forall x \in X; y \in Y,$
si $(\bar{x}, \bar{y})$ es un punto de silla.

Prueba: La proposición (*a*) se puede escribir

$$\max_{y \in Y} (\inf_{x \in X} h(x, y)) = \max_{y \in Y} h_*(y) = h_*(\bar{y}) \qquad \ldots (1)$$

Además,

$$\min_{x \in X} (\sup_{y \in Y} h(x, y) = \min_{x \in X} h^*(x) = h^*(\bar{x}) \qquad \ldots (2)$$

Como (1) = (2), se tiene que $h_*(\bar{y}) = h^*(\bar{x})$ que es la proposición (*b*). (Se ha demostrado que $(a) \Rightarrow (b)$).

Además, como $h_*(y) \leqslant h^*(x)$, si se invierte el proceso anterior, se tiene que la proposición (*b*) implica (*a*).

Ahora se probará que $(b) \Rightarrow (c)$.

Como $h_*(y) \leqslant h(x, y) \leqslant h^*(x) \quad \forall x \in X \; y \in Y$, se tiene que

$$h_*(y) \leqslant h(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant h^*(x)$$

y de la proposición (*b*) se llega a:

$$h_*(\bar{y}) = h(\bar{x}, \bar{y}) = h^*(\bar{x})$$

Pero por definición, $h(x, \bar{y}) \leqslant h_*(\bar{y})$ y $h^*(\bar{x}) \leqslant h(\bar{x}, y)$ de donde se obtiene (*c*). Por lo tanto, (*c*) es simplemente otra manera de escribir (*b*), y por lo tanto (*b*) y (*c*) son equivalentes.

Finalmente, por transitividad $(a) \equiv (c)$. ■

6.5 PUNTOS DE SILLA DEL LAGRANGEANO Y DUALIDAD

En esta sección se utilizarán los conceptos anteriores para ver que los problemas primal y dual surgen muy naturalmente de su aplicación a la función Lagrangeana. Así, considérese la función Lagrangeana:

$$L(x, u, v) = f(x) + u^T g(x) + v^T h(x)$$

donde $u \geqslant 0$.

Entonces, esta función posee un punto de silla si existe $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v})$, tal que:

$$L(x, \overline{u}, \overline{v}) \geqslant L(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}) \geqslant L(\overline{x}, u, v)$$

con $u \geqslant 0$.

En forma análoga al inciso anterior, se define la *función primal* como:

$$L^*(x) = \sup_{u,\, v} L(x, u, v)$$

y la *función dual* será:

$$L_*(u, v) = \min_{x} L(x, u, v)$$

Así, estas funciones conducen a dos problemas de optimización; a saber:

- El *primal:* Encontrar $\overline{x}$, tal que

$$L^*(\overline{x}) = \min_{x \in X} L^*(x)$$

- El *dual:* Encontrar $\overline{u}, \overline{v}$ con $\overline{u} \geqslant 0$, tales que:

$$L_*(\overline{u}, \overline{v}) = \sup_{u,\, v} L_*(u, v)$$

Se demostrará que esto es equivalente a lo que ya se había visto. Inicialmente se probará que el primal que se planteó originalmente se obtiene de examinar la función y el problema primal:

$$L^*(x) = \sup_{u,\, v} \{f(x) + u^T g(x) + v^T h(x)\}$$

Nótese que si $g_i(x) > 0$ para alguna "i" y/o $h_j(x) \neq 0$ para alguna "j", entonces se puede hacer que $L^*(x) = +\infty$, haciendo $u_i = +\infty$ y $v_j = \pm\infty$ según $h_j(x)$ sea mayor o menor que cero. (Recuérdese que v no tiene restricción

de signo). Ahora bien, el problema primal requiere minimizar $L^*(x)$ respecto a $x \in X$ y por lo tanto, el caso anterior ($L^*(x) = +\infty$) debe eliminarse. Esto se logra resolviendo el problema.

$$\left.\begin{array}{r} \text{mín } f(x) \\ \text{s. a. } g(x) \leqslant 0 \\ h(x) = 0 \\ x \in X \end{array}\right\} \equiv (P)$$

De esta manera se minimiza $L^*(x)$ haciendo $L^*(\overline{x}) = f(\overline{x})$, ya que si $h(x) = 0$ y $g(x) \leqslant 0$, se tiene necesariamente que $v^T h(x) = 0$ y que $\exists\, u \geqslant 0$, tal que $u^T g(x) = 0$, haciendo $u_i = 0$, cuando $g_i(x) < 0$.

Nótese que (P) es el problema primal tal como se definió en un principio.

Ahora, examínese el problema dual: Encontrar $\overline{u}, \overline{v}$; $\overline{u} \geqslant 0$, tal que:

$$L_*(\overline{u}, \overline{v}) = \sup_{u,\, v} L_*(u, v) = \sup_{u,\, v} \min_{x \in X} L(x, u, v);\ u \geqslant 0.$$

Esto es lo mismo que resolver el problema:

$$\left.\begin{array}{r} \sup L_*(u, v) \\ \text{s.a.} \quad u \geqslant 0 \end{array}\right\} \equiv (\text{D})$$

Donde $L_*(u, v) = \min_{x \in X} L(x, u, v)$

que es exactamente la forma en que se había definido el problema dual.

6.6 EL RESULTADO DEBIL DE DUALIDAD

En esta sección se investiga la primera relación entre el primal y el dual, que se conoce como el teorema débil. En este teorema se demuestra formalmente el resultado que se vio intuitivamente en la interpretación geométrica del dual, de que la función objetivo primal acota superiormente la del dual, y viceversa. Varios resultados importantes se derivan como corolarios.

Teorema 6.2: Sea x una solución factible para el primal (i.e. $g(x) \leqslant 0$; $h(x) = 0$; $x \in X$) y sea (u, v) factible para el dual (*i.e.* $u \geqslant 0$). Entonces:

$$f(x) \geqslant \theta(u, v)$$

Prueba: Por definición de θ y dado que x es factible para el primal, se tiene que:

$$\theta(u, v) = \inf_{y \in X} \{f(y) + u^T g(y) + v^T h(y)\} \leqslant f(x) + u^T g(x) + v^T h(x) \leqslant f(x)$$

ya que si (u, v) es factible para el dual y "x" es factible para el primal, $u \geqslant 0$ y $g(x) \leqslant 0$; $h(x) = 0$.

Corolario 1: $\inf \{f(x) | x \in X, g(x) \leqslant 0, h(x) = 0\} \geqslant \text{Sup} \{\theta(u, v) | u \geqslant 0\}$

Corolario 2: Si $\bar{x}$ y $(\bar{u}, \bar{v})$ son tales que $\bar{x}$ es factible para (P), y $(\bar{u}, \bar{v})$ es factible para (D) y además $f(\bar{x}) \leqslant \theta(\bar{u}, \bar{v})$; entonces $\bar{x}$ y $(\bar{u}, \bar{v})$ son óptimos para (P) y (D), respectivamente.

Corolario 3: Si $\inf \{f(x) | x \in X, g(x) \leqslant 0, h(x) = 0\} = -\infty$, entonces

$$\theta(u, v) = -\infty \quad \forall\, u \geqslant 0.$$

Corolario 4: Si $\sup \{\theta(u, v) | u \geqslant 0\} = +\infty$, entonces el primal no tiene solución factible.

6.7 FUNCIONES CONVEXAS DIFERENCIABLES

En esta sección se va a transformar el problema dual a una forma que resulta más conveniente, aunque la equivalencia depende en forma importante de la convexidad de las funciones. Esta forma será de gran utilidad en las secciones que siguen.

Considérese la pareja de problemas Primal-Dual siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{x \in X} f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \leqslant 0 \end{array}\right| \equiv \text{Primal} \qquad \text{Dual} \equiv \left|\begin{array}{l} \max\limits_{u} \theta(u) \\ \text{s.a. } \theta(u) = \inf\limits_{x \in X} L(x, u) \\ u \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Donde $X \subset E^n$ es un conjunto convexo abierto y $L(x, u) = f(x) + u^T g(x)$; f: $E^n \to \mathcal{R}$ y g: $E^n \to E^m$ son funciones diferenciables. Entonces dado u, el ínfimo de $L(x, u)$ respecto a x si existe, se logra en un punto $\bar{x} \in X$ donde desaparece el gradiente del Lagrangeano $L(x, u)$; es decir,

$$\nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x}) u = 0$$

Se sabe que si f, g son convexas, esta condición es también suficiente.

Ahora el problema dual se puede escribir como

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{u,\ x} L(x, u) \\ \text{s.a. } \nabla f(x) + \nabla g(x)u = 0 \\ \qquad\qquad u \geqslant 0 \\ \qquad\qquad x \in X \end{array}\right\} \equiv \text{Dual Diferenciable (DD)}$$

6.8 LA BRECHA DE DUALIDAD Y LOS TEOREMAS DE INEXISTENCIA DE LA BRECHA Y DE DUALIDAD CONVERSA

Nótese que, bajo las condiciones del teorema 6.1, *lo único* que se puede demostrar es que la función objetivo del primal y del dual tienen la relación $f(x) \geqslant \theta(u, v)$ para puntos factibles a sus respectivos problemas, por esta razón se conoce como el resultado débil. Contrario a lo que sucede en el caso de programación lineal, pueden haber casos en que, si x^* y (u^*, v^*) son óptimos para sus respectivos problemas, la relación se cumpla con estricta desigualdad (i.e. $f(x^*) > \theta(u, v)^*$). En este caso se dice que existe una *brecha* de dualidad entre el primal y el dual.

Geométricamente, la brecha se ilustra en la figura siguiente, para el caso en que se tiene una sola restricción del tipo $g(x) \leqslant 0$.

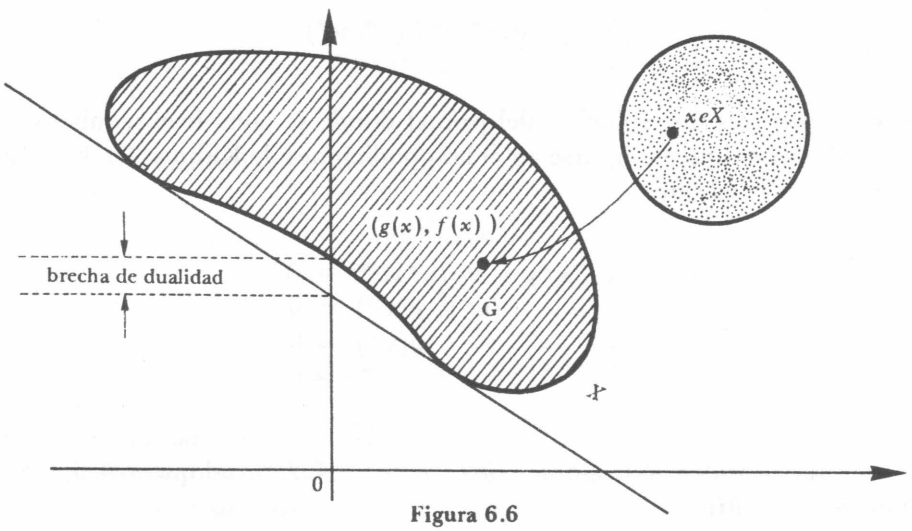


Figura 6.6

Como se puede observar, el problema surge porque hay una no-convexidad "inconveniente" en el conjunto G. Nótese, sin embargo, que la convexidad del conjunto G no es una condición necesaria para que no exista una brecha de dualidad. Esto se ilustró en el ejemplo VI.1., en donde no hay brecha de dualidad, y sin embargo, G no es un conjunto convexo.

Las condiciones de ausencia de una brecha y de *dualidad conversa;* es decir, de establecer condiciones bajo las cuales las soluciones óptimas de ambos problemas proporcionan el mismo valor a las dos funciones objetivo y cuando los problemas tienen una misma solución, ha sido estudiado a profundidad, y existen varios resultados interesantes. Aquí se presentan algunos teoremas que se consideran representativos.

En primer término, y por razones históricas, se muestra un resultado de Wolfe[46] que fue uno de los primeros obtenidos en la materia.

Teorema 6.2: Considérese la pareja de problemas primal-dual siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\min\limits_{x \in X} f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \leqslant 0\end{array}\right\} \equiv \text{Primal} \qquad \text{Dual} \equiv \left\{\begin{array}{l}\max\limits_{x,\,u} L(x, u) \\ \text{s.a. } \nabla f(x) + \nabla g(x)\, u = 0 \\ \qquad\qquad u \geqslant 0\end{array}\right.$$

Donde $X \subset E^n$ es un conjunto abierto $L(x, u) = f(x) + u^T g(x)$ y f: $E^n \to \mathcal{R}$ y g: $E^n \to E^m$ son funciones convexas y diferenciables. Sea x^* una solución del primal tal, que se satisface el requisito restriccional en este punto. Entonces, existe u^* tal, que (u^*, x^*) resuelven el problema dual y tal que

$$f(x^*) = \theta(u^*) = L(x^*, u^*)$$

Prueba: Si x^* es una solución del primal donde se cumple el requisito restriccional, tienen que cumplirse en él las condiciones de Kuhn y Tucker. Así, existe $u^* \in E^m$, tal que:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\, u^* &= 0 \\ (u^*)^T g(x^*) &= 0 \\ g(x^*) &\leqslant 0 \\ u^* &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Ahora, considérese cualquier otro vector $u \in E^m$, tal que $u \geqslant 0$, y examínese $\theta(u^*) - \theta(u)$.

$$\begin{aligned} \theta(u^*) - \theta(u) &= f(x^*) + (u^*)^T g(x^*) - f(x) - u^T g(x) \\ &= f(x^*) - f(x) + (u^*)^T g(x^*) - u^T g(x) \end{aligned}$$

Entonces, por convexidad de f, y dado que (x^*, u^*) satisfacen las condiciones de Kuhn y Tucker, se tiene que $(u^*)^T g(x^*) = 0$, y por lo tanto:

$$\theta(u^*) - \theta(u) = f(x^*) - f(x) - u^T g(x)$$

$$\geqslant \nabla f(x)^T \ (x^* - x) - u^T g(x)$$

Análogamente, por convexidad de g se tiene que,

$$g(x^*) \geqslant g(x) + \nabla g(x)^T \ (x^* - x)$$

y esto proporciona:

$$\theta(u^*) - \theta(u) \geqslant \nabla f(x)^T \ (x^* - x) + u^T \ [-g(x^*) + \nabla g(x)^T \ (x^* - x)]$$

$$= [\nabla f(x) + \nabla g(x) \ u \ ]^T \ (x^* - x) - u^T g(x^*)$$

$$= - u^T \ g(x^*) \geqslant 0$$

ya que $u \geqslant 0$, $g(x^*) \leqslant 0$ y $\nabla f(x) + \nabla g(x)u = 0$, por ser (x, u) factible para el dual diferenciable.

Por lo tanto, $\theta(u^*) = \text{máx } \theta(u)$ sujeto a que

$$\theta(u) = \inf \{f(x) + u^T g(x) \mid x \in X\}$$

esto implica que:

$$\max_{u \geqslant 0} \{ \inf_{x \in x} [f(x) + u^T g(x)]\} = f(x^*) + (u^*)^T g(x^*) = L(x^*, u^*)$$

y por complementaridad se tiene que

$$(u^*)^T \ g(x^*) = 0$$

de donde se obtiene:

$$\theta(u^*) = f(x^*) = L(x^*, u^*)$$

que es el resultado deseado. ■

Como puede observarse, el resultado anterior da condiciones de ausencia de brecha en un caso muy bien comportado, donde todas las funciones son diferenciables y convexas y el resultado podría anticiparse fácilmente. Ahora, será interesante analizar condiciones bajo las cuales no sólo no existe la brecha, sino que los dos problemas tienen una misma solución. Es decir, se busca establecer el converso del teorema anterior, en donde la solución del dual también es una solución del primal; de ahí el nombre de dualidad conversa. Para poder obtener tal teorema hay que pagar un precio, como se ilustra en el siguiente resultado atribuido a Mangasarian.[31]

Teorema 6.3: Sea $X \subset E^n$ un conjunto abierto y f, g funciones convexas y diferenciables sobre X. Sea $\bar{x}$ una solución del problema primal como se presentó en el teorema anterior, tal que se satisface el requisito restriccional en $\bar{x}$. Si $(\hat{x}, \hat{u})$ es una solución dual, y $L(\hat{x}, \hat{u}) = f(\hat{x}) + \hat{u}^T g(\hat{x})$ es una función estrictamente convexa en $\hat{x}$, entonces $\hat{x} = \bar{x}$ y por lo tanto, es una solución del problema primal.

Prueba: Nótese que $L(\hat{x}, \hat{u})$ es estrictamente convexa en $\hat{x}$, si f es estrictamente convexa en $\hat{x}$ ó, si para algún índice "i", se tiene que el elemento $\hat{u}_i > 0$ y la correspondiente función g_i de g, es estrictamente convexa.

Entonces, supóngase que $\hat{x} \neq \bar{x}$ para buscar una contradicción. Como $\bar{x}$ es una solución al primal y satisface el requisito restriccional, se sabe del teorema anterior que existe $\bar{u} \in E^m$, tal que la pareja $(\bar{x}, \bar{u})$ es una solución del problema dual, además de que satisface las condiciones de Kuhn y Tucker. Así, se tiene que:

$$L(\bar{x}, \bar{u}) = L(\hat{x}, \hat{u}) = \theta(\hat{u}) = \max_{u} \theta(u)$$

$$\text{s.a. } \theta(u) = \inf_{x \in X} \{L(u, x)\}$$

Ahora bien, como $(\hat{x}, \hat{u})$ resuelve el problema dual, satisface

$$\nabla_x L(\hat{x}, \hat{u}) = \nabla f(\hat{x}) + \nabla g(\hat{x})\hat{u} = 0$$

Entonces, como $L(x, u)$ es estrictamente convexa en $(\hat{x}, \hat{u})$, del teorema 3.7 se sabe que

$$L(\bar{x}, \hat{u}) - L(\hat{x}, \hat{u}) > \nabla_x L(\hat{x}, \hat{u})^T (\bar{x} - \hat{x}) = 0$$

Esto significa que

$$L(\bar{x}, \hat{u}) > L(\hat{x}, \hat{u}) = L(\bar{x}, \bar{u})$$

Pero como $L(x, u) = f(x) + u^T g(x)$ y $f(\bar{x}) = f(\hat{x})$, lo anterior implica que

$$\hat{u}^T g(\bar{x}) > \bar{u}^T g(\bar{x}) = 0,$$

ya que la pareja $(\bar{x}, \bar{u})$ satisface las condiciones de Kuhn y Tucker. Pero esto contradice el hecho de que $\hat{u} \geqslant 0$ y $g(\bar{x}) \leqslant 0$, con lo cual se establece el resultado $\hat{x} = \bar{x}$. Además, se tiene que

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \bar{u}^T g(\bar{x}) = L(\bar{x}, \bar{u}) = L(\hat{x}, \hat{u}) \quad \blacksquare$$

Como ya se indicó, los teoremas anteriores tienen fuertes supuestos de convexidad de las funciones. Por lo tanto, sería deseable examinar hasta qué punto se puede relajar el supuesto de convexidad y garantizar la existencia de dualidad conversa. A continuación se presenta una generalización hecha por Mangasarian, a un teorema de Hanson y Huard.[14, 17]

Teorema 6.4: Sea $X \subset E^n$ un conjunto abierto y f y g diferenciables sobre X. Sea $(\hat{x}, \hat{u})$ una solución *local* del dual y supóngase que f es pseudoconvexa y g es cuasiconvexa en $\hat{x}$. Supóngase que

a) $L(x, \hat{u})$ es doblemente diferenciable en $\hat{x}$ y la matriz hessiana $\nabla_x^2 L(\hat{x}, \hat{u})$ es no-singular.

b) Existe un conjunto abierto $V \subset E^m$, tal que $\hat{u} \in V$ y una función diferenciable $\phi : V \to E^n$, tal que:

i) $\hat{x} = \phi(\hat{u})$

ii) $\phi(u) \in X;\ \nabla_x L(\phi(u), u) = 0, \quad \forall\, u \in V$

Entonces $\hat{x}$ es una solución del primal y

$$f(\hat{x}) = L(\hat{x}, \hat{u}).$$

Prueba: Para iniciar la prueba, recuérdese que si $(\hat{x}, \hat{u})$ es un óptimo local del dual, entonces existe $B[(\hat{x}, \hat{u}), \delta]$, tal que

$$\theta(\hat{u}) = L(\hat{x}, \hat{u}) = \max \theta(u)$$
$$\text{s.a. } \theta(u) = \inf_{x \in X} \{L(x, u)\}$$

$$\forall\, (x, u) \subset B[(\hat{x}, \hat{u}), \delta] \cap Y$$

Donde $Y = X \times E^m$. Además, del teorema anterior recuérdese que, al ser f y g diferenciables, una condición necesaria para que (x, u) sea una solución del dual, es que

$$\nabla f(x) + \nabla g(x) u = 0$$

Ahora, nótese que *b*) es una consecuencia de *a*), por el teorema de la función implícita; pero *a*) *no* sigue del supuesto *b*). Así, se probará el teorema bajo el supuesto *b*), del cual inmediatamente se tiene que:

$$(\hat{x}, \hat{u}) = [\phi(\hat{u}), \hat{u}] \in \{[\phi(u), u] \mid u \in V;\ \ u \geqslant 0\} \subset Y$$

Entonces, como $L[\phi(\hat{u}), \hat{u}] = L(\hat{x}, \hat{u}) = \max_{(x, u) \in Y} L(x, u)$

se deduce que $L[\phi(\hat{u}), \hat{u}] = \max_{u \in V} \{L[\phi(u), u] \mid u \geqslant 0\}$

Como ya se indicó, los teoremas anteriores tienen fuertes supuestos de convexidad de las funciones. Por lo tanto, sería deseable examinar hasta qué punto se puede relajar el supuesto de convexidad y garantizar la existencia de dualidad conversa. A continuación se presenta una generalización hecha por Mangasarian, a un teorema de Hanson y Huard.[14, 17]

Teorema 6.4: Sea $X \subset E^n$ un conjunto abierto y f y g diferenciables sobre X. Sea $(\hat{x}, \hat{u})$ una solución *local* del dual y supóngase que f es pseudoconvexa y g es cuasiconvexa en $\hat{x}$. Supóngase que

a) $L(x, \hat{u})$ es doblemente diferenciable en $\hat{x}$ y la matriz hessiana $\nabla_x^2 L(\hat{x}, \hat{u})$ es no-singular.

b) Existe un conjunto abierto $V \subset E^m$, tal que $\hat{u} \in V$ y una función diferenciable $\phi : V \to E^n$, tal que:

i) $\hat{x} = \phi(\hat{u})$

ii) $\phi(u) \in X;\ \nabla_x L(\phi(u), u) = 0, \quad \forall u \in V$

Entonces $\hat{x}$ es una solución del primal y

$$f(\hat{x}) = L(\hat{x}, \hat{u}).$$

Prueba: Para iniciar la prueba, recuérdese que si $(\hat{x}, \hat{u})$ es un óptimo local del dual, entonces existe $B[(\hat{x}, \hat{u}), \delta]$, tal que

$$\theta(\hat{u}) = L(\hat{x}, \hat{u}) = \max \theta(u)$$
$$\text{s.a. } \theta(u) = \inf_{x \in X} \{L(x, u)\}$$

$$\forall (x, u) \subset B[(\hat{x}, \hat{u}), \delta] \cap Y$$

Donde $Y = X \times E^m$. Además, del teorema anterior recuérdese que, al ser f y g diferenciables, una condición necesaria para que (x, u) sea una solución del dual, es que

$$\nabla f(x) + \nabla g(x) u = 0$$

Ahora, nótese que *b*) es una consecuencia de *a*), por el teorema de la función implícita; pero *a*) *no* sigue del supuesto *b*). Así, se probará el teorema bajo el supuesto *b*), del cual inmediatamente se tiene que:

$$(\hat{x}, \hat{u}) = [\phi(\hat{u}), \hat{u}] \in \{[\phi(u), u] \mid u \in V;\ \ u \geqslant 0\} \subset Y$$

Entonces, como $L[\phi(\hat{u}), \hat{u}] = L(\hat{x}, \hat{u}) = \max_{(x, u) \in Y} L(x, u)$

se deduce que $L[\phi(\hat{u}), \hat{u}] = \max_{u \in V} \{L[\phi(u), u)] \mid u \geqslant 0\}$

Nótese que lo anterior es un problema de optimización que, al aplicarle la regla de la cadena y el teorema de Kun y Tucker cede lo siguiente:

$$\nabla_x L(\phi(\hat{u}), \hat{u})\, \nabla_u \phi(\hat{u}) + \nabla_u L(\phi(\hat{u}), \hat{u}) \leqslant 0$$

Ahora bien, del supuesto b) se tiene que $\nabla_x L(x, \hat{u}) = 0$, si $\hat{x} = \phi(\hat{u})$ y $\hat{u} \in V$. Además, como $L(x, u) = f(x) + u^T g(x)$, se tiene que

$$\nabla_u L(u, x) = g(x),$$

y por lo tanto, la relación anterior dice que

$$g(\hat{x}) \leqslant 0$$

Por el teorema de la función implícita se sabe que se satisface la relación

$$\nabla_x L(\hat{x}, \hat{u})\, \nabla_u \phi(\hat{u}) = -\nabla_u L(\hat{x}, \hat{u})$$

de donde se tiene que:

$$\hat{u}^T [\nabla_x L(\hat{x}, \hat{u})\, \nabla_u \phi(u) + \nabla_u L(\hat{x}, \hat{u})] = 0$$

y por lo tanto, $\hat{u}^T g(\hat{x}) = 0$.

Finalmente, al ser $(\hat{x}, \hat{u})$ una solución del dual, se satisfacen las relaciones.

$$\nabla f(\hat{x}) + \nabla g(\hat{x})\, \hat{u} = 0$$

$$\hat{u}^T\, g(\hat{x}) = 0$$

$$\hat{u} \geqslant 0$$

$$g(\hat{x}) \leqslant 0.$$

Por lo tanto, $\hat{x}$ es factible para el primal y se satisfacen las condiciones de Kuhn y Tucker con $\hat{u}$. Como f y g son diferenciables, f es pseudoconvexa y g es cuasiconvexa, el teorema 5.11 indica que $\hat{x}$ es una solución óptima para el primal y por lo tanto

$$f(\hat{x}) = \theta(\hat{u}) \quad \blacksquare$$

Un hecho curioso es que contrariamente a lo que pudiera pensarse, si $\bar{x}$ es una solución del primal bajo las condiciones del teorema anterior, no

necesariamente existe $\bar{u}$ tal que $(\bar{x}, \bar{u})$ es una solución del dual; ni siquiera cuando g es lineal. Tampoco se satisface la condición débil de dualidad; es decir, que $f(\bar{x}) \geqslant L(x, u)$ para cualquier pareja (x, u) que sea factible para el dual. Esto se ilustra en el ejemplo que se presenta a continuación.

Ejemplo 6.3: Considérese el problema siguiente cuya función objetivo es pseudoconvexa.

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{x \in R} \; -e^{-x^2} \\ \text{s.a. } x \leqslant -1 \end{array}\right\} \equiv \text{Primal}$$

El dual de este problema es:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{x,u} \; -e^{-x^2} + u(x+1) \\ \text{s.a. } 2x\,e^{-x^2} + u = 0 \\ \qquad\qquad u \geqslant 0 \end{array}\right\} \equiv \text{Dual Diferenciable}$$

Obviamente, la solución óptima del primal es $\bar{x} = -1$, y es fácil de comprobar que con $\bar{u} = \frac{2}{e}$ se satisfacen las condiciones de Kuhn y Tucker.

Ahora, nótese que el dual exige que $u = -2x\,e^{-x^2}$ y como el multiplicador tiene que ser no-negativo, esto implica que x a su vez tiene que ser no-positivo. Así, el dual puede escribirse equivalentemente, de la manera siguiente:

$$\begin{array}{l} \max -e^{-x^2} - 2x\,e^{-x^2}\,(x+1) \\ \text{s.a. } x \leqslant 0 \end{array}$$

Es decir,

$$\max_{x \leqslant 0} \; -[1 - 2x + 2x^2]\,e^{-x^2}$$

Este problema no tiene máximo, aunque sí tiene un supremo o mínima cota superior ya que la función está acotada superiormente por cero. Para ver esto, nótese que $-[1 - 2x + 2x^2]\,e^{-x^2} \to 0$, cuando $e^{-x^2} \to 0$. Además, nótese que el $1 - 2x + 2x^2 \geqslant \frac{1}{2}$, ya que el mínimo de esta función está en $x = \frac{1}{2}$, con lo cual se tiene que la función siempre es negativa.

Finalmente, considérese el punto $(\tilde{x}, \tilde{u}) = (-5, 10e^{-25})$, que es factible para el problema dual. Nótese que

$$L(\tilde{x}, \tilde{u}) = -e^{-25} + 60e^{-100} = 59e^{-25}$$

y que

$$f(\bar{x}) = -e^{-1} < 59e^{-25}$$

Así, en este ejemplo se ve que ni siquiera se satisface la condición débil de dualidad. Lo que sucede en este caso es que al no ser f y g funciones convexas, la condición $\nabla f(x) + \nabla g(x)u = 0$ es necesaria mas no suficiente para un mínimo y por lo tanto, la forma equivalente que se ha dado al dual tampoco es suficiente en este caso. ■

Para concluir esta sección dando una visión completa de condiciones bajo las cuales se garantiza la dualidad conversa, es menester examinar lo que se requiere en el caso del problema general de programación no-lineal, que incluye restricciones con igualdades. Obviamente el problema es bastante más difícil y las condiciones son mucho más restrictivas. Un resultado típico se presenta en el teorema 6.6, donde se impone una condición de linealidad a las restricciones representadas por igualdades, y también se impone un nuevo requisito restriccional.

Para poder demostrar el teorema, se requiere antes, demostrar el resultado que se presenta a continuación.

Lema 6.5: Sea $X \subset E^n$ un conjunto convexo no vacío. Sean f: $E^n \to \Re$ y g: $E^n \to E^m$ convexas, y sea h: $E^n \to E^s$ una función afín; es decir, h es de la forma $h(x) = Ax - b$, donde A es una matriz de $(n \times s)$ y b es un vector de dimensión "s".

Considérense los siguientes dos sistemas:

1. $f(x) < 0, g(x) \leqslant 0, h(x) = 0$ para alguna $x \in X$

2. $u_0 f(x) + u^T g(x) + v^T h(x) \geqslant 0$, tal que $x \in X\ (u_0, u) \geqslant 0, (u_0, u, v) \neq 0$.

Entonces, si el sistema 1) no tiene una solución x, el sistema 2) tiene una solución (u_0, u, v).

Lo contrario es cierto si $u_0 > 0$.

Prueba: Supóngase que el sistema 1) no tiene solución y considérese el siguiente conjunto:

$$C = \{(p, q, r) \mid p > f(x), q \geqslant g(x), r = h(x) \text{ para alguna } x \in X\}$$

Se probará que el conjunto C es convexo.

Sean $(p_1, q_1, r_1), (p_2, q_2, r_2) \in C$, es decir,

$$p_1 > f(x), q_1 \geqslant g(x), r_1 = h(x) \text{ para alguna } x \in X$$

$$p_2 > f(y), q_2 \geqslant g(y), r_2 = h(y) \text{ para alguna } y \in X.$$

Sea $(p, q, r) = \lambda(p_1, q_1, r_1) + (1 - \lambda)(p_2, q_2, r_2), \lambda \in (0, 1)$

Entonces, por convexidad de f, g, y del conjunto X, y dado que h es una función afín, se tiene que

$$p = \lambda p_1 + (1-\lambda)p_2 > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geqslant f(\lambda x + (1-\lambda) y),$$

$$q = \lambda q_1 + (1-\lambda)q_2 \geqslant \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) \geqslant g(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

$$r = \lambda r_1 + (1-\lambda)r_2 = \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y) = h(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

donde $\lambda x + (1-\lambda) y \in X$, por ser X convexo.

Por lo tanto, C es convexo.

Ahora bien, dado que el sistema 1) no tiene solución, entonces

$$0 = (0, 0, 0) \notin C.$$

Por ser C convexo y no vacío existe (u_0, u, v), tal que el hiperplano correspondiente separa 0 de C y se satisface la relación:

$$(u_0, u, v)^T (p-0, q-0, r-0) \geqslant 0 \text{ para cada } (p, q, r) \in \widetilde{C}$$

o equivalentemente

$$u_0 p + u^T q + v^T r \geqslant 0, \text{ para cada } (p, q, r) \in \widetilde{C}$$

Esto quiere decir que existe un hiperplano que soporta a $\widetilde{C}$ en $(0, 0, 0)$.

Sea $\overline{x} \in X$. Dado que p y q pueden hacerse arbitrariamente grandes, la expresión anterior se cumple si y sólo si $u_0 \geqslant 0$ y $u \geqslant 0$.

Además, si $(p, q, r) \in C$

$$(p, q, r) = (f(x), g(x), h(x))$$

y de esta manera se obtiene

$$u_0 f(x) + u^T g(x) + v^T h(x) \geqslant 0, (u_0, u) \geqslant 0, (u_0, u, v) \neq 0$$

Dado que lo anterior se cumple para cada $x \in X$, el sistema 2) tiene solución.

Para probar el inverso, supóngase que el sistema 2) tiene una solución (u_0, u, v) tal que $u_0 > 0$ y $u \geqslant 0$ satisfacen

$$u_0 f(x) + u^T g(x) + v^T h(x) \geqslant 0, \text{ para cada } x \in X.$$

Sea $x \in X$ tal que $g(x) \leqslant 0$ y $h(x) = 0$. De la última desigualdad, dado que $u \geqslant 0$, se concluye que $u_0 f(x) \geqslant 0$ y dado que $u_0 > 0$, entonces $f(x) \geqslant 0$, y por lo tanto, el sistema 1) no tiene solución. ■

Con esto se puede demostrar el resultado mencionado y que también se conoce como el *resultado fuerte de dualidad.*

Teorema 6.6: Sea $X \subset E^n$ un conjunto convexo no-vacío y sean $f: E^n \to \Re$; $g: E^n \to E^m$ funciones convexas y $h: E^n \to E^s$ una función afín. Supóngase además que se satisface el requisito restriccional siguiente:

i) $\{x \mid g(x) < 0; h(x) = 0\} \neq \phi$

ii) $0 \in \overset{\circ}{h}(X) = \text{int } \{h(x) \mid x \in X\}$

Entonces,

a) $\inf \{f(x) \mid x \in X; g(x) \leqslant 0 \ \ h(x) = 0\} = \sup \{\theta(u, v) \mid u \geqslant 0\}$
Además, si el ínfimo es finito, entonces existen $(\overline{u}, \overline{v})$ con $\overline{u} \geqslant 0$, tales que:

b) $\sup \{\theta(u, v) \mid u \geqslant 0\} = \theta(\overline{u}, \overline{v})$
Finalmente, si existe $\overline{x} \in X$, tal que
$f(\overline{x}) = \inf \{f(x) \mid x \in X; g(x) \leqslant 0; h(x) = 0\}$
entonces,

c) $\overline{u}^T g(\overline{x}) = 0$

Prueba: Sea $\alpha = \inf \{f(x) \mid x \in X; g(x) < 0; h(x) = 0\}$

Entonces, si $\alpha = -\infty$, el corolario 3 del teorema 6.2 dice que

$\sup \{\theta(u, v) \mid u \gtrsim 0\} = -\infty$ y se satisface la relación *a*) del teorema.

Ahora, supóngase que α es finito; es decir, $|\alpha| < \infty$ y examínese el sistema siguiente:

$$f(x) - \alpha < 0; g(x) \leqslant 0; h(x) = 0; x \in X.$$

Por la forma en que se ha definido α, este sistema no tiene solución y el lema 6.5 dice que existe un vector $(u_0, u, v) \neq 0$ con $(u_0, u) \geqslant 0$, tal que

$$u_0 [f(x) - \alpha] + u^T g(x) + v^T h(x) \geqslant 0 \qquad \ldots\ldots (1)$$

para cualquier $x \in X$.

En primer término, se prueba que $u_0 > 0$.

Supóngase lo contrario; $u_0 = 0$. Como se cumple el requisito restriccional, existe $\hat{x} \in X$, tal que:

$$g(\hat{x}) < 0; h(\hat{x}) = 0$$

y además, $0 \in \overset{\circ}{h}(X)$.

Entonces, al sustituir en 1), se obtiene:

$$u^T g(\hat{x}) \geqslant 0$$

lo cual sólo es posible si $u = 0$, ya que "u" debe ser no negativo. Entonces, el tener $u_0 = 0$ y $u = 0$, 1) implica que $v^T h(x) \geqslant 0$, para toda $x \in X$.

Ahora bien, al ser $0 \in \overset{\circ}{h}(X)$, existe $\epsilon > 0$, tal que $B(0, \epsilon) \subset h(X)$ y por lo tanto, $-\lambda v \in B(0, \epsilon)$ para alguna $\lambda > 0$ y existe $\bar{\bar{x}} \in X$, tal que

$$h(\bar{\bar{x}}) = -\lambda u$$

De aquí se deduce que

$$0 \leqslant v^T h(\bar{\bar{x}}) = -\lambda \|v\|^2 = 0, \text{ ya que } \lambda > 0$$

y por lo tanto, $u_0 = 0$ implica $(u_0, u, v) = 0$, lo cual es una contradicción.

Ahora, divídase 1) entre u_0 y defínase:

$$\bar{u} = \frac{u}{u_0} \; ; \; \bar{v} = \frac{v}{u_0}$$

con lo cual se obtiene

$$f(x) + \bar{u}^T g(x) + \bar{v}^T h(x) \geqslant \alpha \quad \forall x \in X \qquad \ldots\ldots (2)$$

Esto demuestra que

$$\theta(u, v) = \inf_{x \in X} \{ f(x) + \bar{u}^T g(x) + \bar{v}^T h(x) \} \geqslant \alpha$$

y por el resultado débil de dualidad, se tiene que de hecho $\theta(\bar{u}, \bar{v}) = \alpha'$, y por lo tanto, $(\bar{u}, \bar{v})$ es una solución del problema dual.

Para concluir la prueba, supóngase que $\bar{x}$ es una solución óptima del problema primal, es decir, $\bar{x} \in X$ y $g(\bar{x}) \leqslant 0$; $h(\bar{x}) = 0$; $f(\bar{x}) = \alpha$. De la relación 2) se tiene entonces que

$$\bar{u}^T g(\bar{x}) \geqslant 0,$$

ya que $f(\bar{x}) = \alpha$ y $\bar{v}^T h(\bar{x}) = 0$. Además, como $\bar{u} \geqslant 0$ y $g(\bar{x}) \leqslant 0$; se tiene que $\bar{u}^T g(\bar{x}) \leqslant 0$, lo cual sólo puede ser cierto si $\bar{u}^T g(\bar{x}) = 0$, con lo cual se demuestra el teorema. ■

6.9 INEXISTENCIA Y NO-ACOTAMIENTO

Uno de los resultados importantes de la programación lineal, es el llamado Teorema Fundamental de Dualidad (véase por ejemplo Bazaraa y Jarvis[3]

pág. 245). Incluso, hay quien lo considera como el teorema más importante en programación lineal. El lector que conozca el tema recordará que además del aspecto de dualidad conversa, el teorema indica lo que sucede cuando la solución de alguno de los problemas es inexistente o no está acotada. Algunos resultados ya han sido obtenidos en los corolarios del teorema débil de dualidad 6.2. En los siguientes teoremas se examinan dos resultados adicionales relacionados con estos casos, para el problema de programación no-lineal.

Teorema 6.7 (Dual No-acotado)

Sea $X \subset E^n$ un conjunto abierto y f, g: $E^n \to \Re$ funciones diferenciables sobre X. Si existe una pareja $(\overline{x}, \overline{u})$ factible para el dual, tal que el sistema

$$g(\overline{x}) + \nabla g(\overline{x})^T z \leqslant 0$$

no tiene solución $z \in E^n$; entonces la función objetivo del problema dual no está acotada superiormente en el conjunto de puntos factibles para el dual.

Prueba: Del teorema (2.9) de alternativas, si

$$g(\overline{x}) + \nabla g(\overline{x})^T z \leqslant 0$$

no tiene solución $z \in E^n$, entonces $\exists\ \hat{u} \in E^m$, tal que

$$\nabla g(\overline{x})\, \hat{u} = 0$$

$$\hat{u} \geqslant 0$$

$$\hat{u}^T g(\overline{x}) = 1$$

Además, como $(\overline{x}, \overline{u})$ es factible para el dual, satisface la relación

$$\nabla f(\overline{x}) + \nabla g(\overline{x})\, \overline{u} = 0$$

$$\overline{u} \geqslant 0$$

Ahora examínese el punto $(\overline{x}, \overline{u} + \tau\hat{u})$ para $\tau \in (0, +\infty)$:

$$\nabla f(\overline{x}) + \nabla g(\overline{x})\,(u + \tau\hat{u}) = \{\nabla f(\overline{x}) + \nabla g(\overline{x})\, \overline{u}\} + \tau \nabla g(\overline{x})\, \hat{u} = 0$$

y $\overline{u} + \tau\hat{u} \geqslant 0 \ \forall\ \tau \in (0, +\infty)$.

Por lo tanto, $(\bar{x}, \bar{u} + \tau\hat{u})$ es factible para el dual, para cualquier

$$\tau \in (0, +\infty).$$

Pero además, como $\hat{u}^T g(x) = 1$, se tiene que la función objetivo del dual satisface la relación:

$$L(\bar{x}, \bar{u} + \tau\hat{u}) = f(\bar{x}) + (\bar{u} + \tau\hat{u})^T g(\bar{x})$$

$$= f(\bar{x}) + \bar{u}^T g(\bar{x}) + \tau \to +\infty$$

cuando $\tau \to +\infty$. ■

Nótese que si g es convexa en $\bar{x}$ y el primal tiene cuando menos un punto factible $\hat{x}$, el teorema anterior ya no se satisface. Para ver esto, defínase $z = \hat{x} - \bar{x}$, con lo cual se tiene

$$0 \geqslant g(\hat{x}) = g(\bar{x} + z) \geqslant g(\bar{x}) + z^T \nabla g(\bar{x})$$

Pero esto significa que el sistema

$$g(\bar{x}) + z^T \nabla g(\bar{x}) \leqslant 0$$

tiene solución.

Se concluye esta sección presentando condiciones bajo las cuales el primal no tiene solución.

***Teorema** 6.8:* Sea $X \subset E^n$ un conjunto abierto y sean $f, g: E^n \to \Re$ funciones diferenciables y cóncavas sobre X. Supóngase que existe x tal que $g(x) < 0$. Entonces, si no existe un punto factible para el dual diferenciable, tampoco el problema primal tiene una solución óptima local ni global.

Prueba: Al no existir un punto factible para el dual diferenciable, el sistema

$$\nabla g(x)^T u = -\nabla f(x)$$

$$u \geqslant 0$$

no tiene solución $u \in E^m$ para ningún $x \in X$. Por el teorema de Farkas, dado $\delta > 0$, para cualquier $x \in X$ existe una solución $z \in E^n$ para el sistema:

$$\nabla g(x)^t z \leqslant 0$$

$$\nabla f(x)^T z < 0$$

y tal que $\|z\| < \delta$.

Sea x tal que $g(x) < 0$. Al ser f y g funciones cóncavas, de las dos desigualdades anteriores se tiene que

$$g(x + z) \leqslant g(x) + \nabla g(x)^T z \leqslant 0$$

$$f(x + z) \leqslant f(x) + \nabla f(x)^T z < f(x)$$

Entonces, si se escoge δ suficientemente pequeño,

$$g(x + z) < 0 \ \forall \ x + z \in B(x, \delta) \subset X$$

y se tiene que las dos desigualdades anteriores siempre se satisfacen, con lo cual x no puede ser un óptimo ni local ni global del problema primal. ■

Nótese que cuando f y g son funciones cóncavas, el conjunto de puntos factibles para el primal $F = \{x \mid g(x) \leqslant 0\}$ no tiene por qué ser convexo. Esto causa también otro tipo de problemas cuando se quiere buscar soluciones al problema primal, ya que pueden existir óptimos locales que no son globales.

6.10 CONDICIONES DE OPTIMALIDAD DE PUNTO DE SILLA

En las secciones 6.4 y 6.5 se examinó el concepto de punto de silla y cómo se relacionan el problema primal y el dual a través del punto de silla del Lagrangeano. En esta sección se examina cómo esto se traduce en condiciones de optimalidad para el problema de optimización. Curiosamente, en el caso de puntos de silla, las condiciones de suficiencia se obtienen fácilmente y sin requisitos restriccionales ni de convexidad. Se recordará que esto es contrario a lo que sucede con las condiciones de Kuhn y Tucker, en donde se requiere algún tipo de convexidad para poder obtener suficiencia. En cambio, las condiciones necesarias son las difíciles, y es menester incluir tanto alguna condición de convexidad sobre las funciones, como requisitos restriccionales.

Un hecho interesante, es que se obtienen resultados de suficiencia fuertes, aun en ausencia de diferenciabilidad en las funciones del problema de programación no-lineal. Para iniciar el análisis, considérese el problema primal sin restricciones de estricta igualdad; a saber:

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{x \in X} f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \leqslant 0 \end{array}\right\} \quad \ldots . \text{(PM)}$$

donde f: $E^n \to \mathcal{R}$, g: $E^n \to E^m$ y $X \subset E^n$ es un conjunto abierto. Para propósitos de esta sección, este problema se llamará el "problema de minimización (PM)".

Ahora se definen dos funciones lagrangeanas; a saber:

$$\phi(x, u_0, u) = u_0 f(x) + u^T g(x) \qquad \ldots \text{(LFJ)}$$

$$\psi(x, u) = f(x) + u^T g(x) \qquad \ldots \text{(LKT)}$$

Nótese que la primera asocia un multiplicador a la función objetivo y por eso puede pensarse como un "Lagrangeano tipo Fritz-John". Análogamente, la otra se pensaría como un "Lagrangeano tipo Kuhn y Tucker". De aquí se puede plantear en primer término, el "*Problema de punto de silla de Fritz-John*" como:

$$(\text{PSFJ}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \overline{x} \in X;\ \overline{u}_0 \in \mathcal{R};\ \overline{u} \in E^m;\ \overline{u} \geqslant 0, \\ \text{si existen, tales que:} \\ \\ \phi(\overline{x}, u_0, u) \leqslant \phi(\overline{x}, \overline{u}_0, \overline{u}) \leqslant \phi(x, \overline{u}_0, \overline{u}) \\ \text{para cualquier } x \in X;\ u_0 \in \mathcal{R};\ u \in E^m \text{ con } u \geqslant 0 \end{array} \right.$$

De manera semejante, el "*Problema de punto de silla de Kuhn y Tucker*" es:

$$(\text{PSKT}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \overline{x} \in X \text{ y } \overline{u} \in E^m;\ \overline{u} \geqslant 0, \text{ tales que} \\ \psi(\overline{x}, u) \leqslant \psi(\overline{x}, \overline{u}) \leqslant \psi(x, \overline{u}) \\ \text{para toda } u \in E^m,\ u \geqslant 0 \text{ y } x \in X \end{array} \right.$$

Recordando el capítulo anterior, resulta obvio que si $(\overline{x}, \overline{u}_0, \overline{u})$ resuelve PSFJ con $\overline{u}_0 > 0$, entonces $(\overline{x}, \overline{u}/u_0)$ resuelve el PSKT. Análogamente, si $(\overline{x}, \overline{u})$ resuelve PSKT, entonces $(\overline{x}, 1, \overline{u})$ resuelve PSFJ.

A la luz de lo anterior, se examina un resultado de suficiencia que relaciona los problemas de punto de silla con el de programación no-lineal PM.

Teorema 6.9 Si $(\overline{x}, \overline{u}_0, \overline{u})$ resuelve PSFJ con $u_0 > 0$, entonces $(\overline{x}, \overline{u}/\overline{u}_0)$ resuelve PSKT y $\overline{x}$ es una solución del problema de minimización (PM).

Prueba: El primer punto resulta evidente como se mencionó en los párrafos anteriores.

Así, supóngase que $(\overline{x}, \hat{u})$ resuelve PSKT, donde $\hat{u} = \overline{u}/\overline{u}_0$. Entonces se tiene que las desigualdades de punto de silla

$$f(\overline{x}) + u^T g(\overline{x}) \leqslant f(x) + \hat{u}^T g(\overline{x}) \leqslant f(x) + \hat{u}^T g(x)$$

se cumplen, para cualquier $u \in E^m$; $u \geqslant 0$ y cualquier $x \in X$. Ahora, defínase u^j de la manera siguiente:

$$u^j = \hat{u} + e_j \geqslant 0$$

donde e_j es el vector unitario correspondiente.

Entonces, del lado izquierdo de la desigualdad anterior se tiene que

$$(u - \hat{u})^T g(\overline{x}) \leqslant 0 \ldots (1)$$

y por la definición anterior de u^j, se tiene que

$$(u^j - \hat{u})^T g(\overline{x}) = g_j(\overline{x}) \leqslant 0$$

Repitiendo el proceso para $j = 1, 2, \ldots, m$, se tiene que $g(\overline{x}) \leqslant 0$ por lo cual $\overline{x}$ es un punto factible para (PM).

Ahora como $\hat{u} \geqslant 0$ y $g(\overline{x}) \leqslant 0$, se tiene que $\hat{u}^T g(\overline{x}) \leqslant 0$ y otra vez, de la desigualdad 1) haciendo $u = 0$, se tiene que $\hat{u}^T g(\overline{x}) \geqslant 0$, lo cual sólo es posible si $\hat{u}^T g(x) = 0$.

Finalmente, considérese cualquier punto factible $x \in X$. Entonces, de la desigualdad derecha de la condición de punto de silla se obtiene:

$$f(\overline{x}) \leqslant f(x) + \hat{u}^T g(x) \leqslant f(x)$$

ya que $\hat{u}^T g(\overline{x}) = 0$ y $\hat{u} \geqslant 0; g(x) \leqslant 0$, por ser x un punto factible. Por lo tanto $\overline{x}$ es una solución de PM. ■

Corolario: Si $(\overline{x}, \overline{u}_0, \overline{u})$ es una solución de PSFJ, entonces $\overline{x}$ resuelve PM, ó $F = \{x | g(x) < 0; x \in X\} = \emptyset$.

Prueba: De manera análoga a la demostración del teorema, se puede demostrar que $\overline{x}, \overline{u}$ satisfacen

$$g(\overline{x}) \leqslant 0, \overline{u}^T g(\overline{x}) = 0$$

Entonces, si $\overline{u}_0 > 0$, es obvio que $\overline{x}$ resuelve a PM, ya que en este caso $\overline{x}, \overline{u}/\overline{u}_0$ satisfacen las condiciones de Kuhn y Tucker para PM.

Supóngase pues que $\overline{u}_0 = 0$, lo cual obliga a que $\overline{u} \geqslant 0$ con $\overline{u} \neq 0$ y de la desigualdad derecha de la condición de punto de silla en el caso de Fritz-John, se tiene que

$$0 = \overline{u}^T g(\overline{x}) \leqslant \overline{u}^T g(x) \quad \forall x \in X$$

Ahora, si F fuera no vacío, se tendría que $\forall\, \hat{x} \in F$

$$\overline{u}^T g(\hat{x}) < 0$$

lo cual es una contradicción. ■

Nótese la gran generalidad del teorema anterior, el cual ni siquiera requiere continuidad de las funciones f y g. Además, como tampoco hay requisitos de convexidad sobre las funciones, el mismo teorema se aplica al caso más general, en donde el problema de minimización también está restringido por ecuaciones del tipo $h(x) = 0$; basta reemplazarlas por dos desigualdades $h(x) \leqslant 0; -h(x) \leqslant 0$.

A continuación se verá que el panorama cambia al tratar de obtener condiciones necesarias, siendo menester recurrir a un requisito restriccional e incluir una condición de convexidad. Además, cuando se incluyen restricciones de estricta igualdad, se requieren condiciones aún más fuertes. El resultado que se demuestra a continuación es clásico.

Teorema 6.10: Sea $X \subset E^n$ un conjunto convexo $f: X \to \Re; g: X \to E^m$ funciones convexas y $h: X \to E^p$ es una función afín; de la forma $h(x) = Ax - b$. Supóngase que $0 \in \overset{0}{h}(X)$ y que existe $\hat{x} \in X$, tal que $g(\hat{x}) < 0; h(\hat{x}) = 0$. Si $\overline{x}$ es una solución del problema de minimización general:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in X} f(x) \\ &\text{s.a. } g(x) \leqslant 0 \\ &\qquad h(x) = 0 \end{aligned}$$

entonces existen $(\overline{u}, \overline{v})$; $\overline{u} \geqslant 0$, tales que $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v})$ resuelven el problema PSKT; es decir, se cumple la relación de punto de silla siguiente:

$$\psi(\overline{x}, u, v) \leqslant \psi(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}) \leqslant \psi(x, \overline{u}, \overline{v})$$

Prueba: Supóngase que $\overline{x}$ resuelve el problema general de minimización. Entonces, del teorema 6.6 de dualidad, existen $(\overline{u}, \overline{v})$ con $\overline{u} \geqslant 0$, tal que $f(\overline{x}) = \theta(\overline{u}, \overline{v})$ y $\overline{u}^T g(\overline{x}) = 0$. Entonces, de la definición de θ se debe tener que:

$$f(\overline{x}) = \theta(\overline{u}, \overline{v}) \leqslant f(x) + \overline{u}^T g(x) + \overline{v}^T h(x) = \psi(x, \overline{u}, \overline{v})$$

para cualquier $x \in X$. Pero como $\overline{u}^T g(\overline{x}) = \overline{v}^T h(\overline{x}) = 0$, se tiene que,

$$\psi(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}) = f(\overline{x}) + \overline{u}^T g(\overline{x}) + \overline{v}^T h(\overline{x}) \leqslant \psi(x, \overline{u}, \overline{v}),$$

obteniendo así la desigualdad del lado derecho de la condición de punto de silla.

La desigualdad izquierda es obvia dado que $\overline{u}^T g(\overline{x}) = 0$; $h(\overline{x}) = 0$; $g(\overline{x}) \leqslant 0$; $\overline{u} \geqslant 0$. ■

Nótese que un corolario inmediato de este teorema es que, haciendo el multiplicador de la función objetivo $u_0 = 1$, las condiciones del teorema garantizan el cumplimiento de una condición de punto de silla tipo Fritz-John.

Estos dos resultados son típicos de lo que se puede obtener en materia de condiciones de optimalidad de puntos de silla; aunque de ninguna manera agotan el tema. Sin embargo, este no es un tema que haya merecido demasiada atención últimamente. Por ejemplo, es notoria la ausencia de resultados de optimalidad de punto de silla bajo condiciones menos fuertes de convexidad.

6.11 LA RELACION ENTRE LAS DISTINTAS CONDICIONES DE OPTIMALIDAD

Como se ha visto en el capítulo anterior y el actual, todas las condiciones de optimalidad derivadas involucran multiplicadores que operan sobre las restricciones del problema. Si ha de haber una equivalencia entre ellas, tendrá que ser a través de estos multiplicadores; es decir, los mismos multiplicadores darían condiciones de optimalidad tipo Fritz-John/Khun-Tucker, de dualidad lagrangeana y de punto de silla.

En este capítulo se aprecia claramente la relación entre puntos de silla del Lagrangeano y soluciones al problema dual. Para esto sólo basta notar que el teorema 6.9 en este caso se apoya en el teorema 6.6 para su comprobación. Sin embargo, la relación entre el dual lagrangeano y los puntos de silla, se manifestaron desde antes, cuando se derivó el dual a partir de los puntos de silla del Lagrangeano, en el inciso 6.5 de este capítulo. Sólo falta pues, establecer una relación entre el criterio de puntos de silla y condiciones de tipo Fritz-John/Khun-Tucker, para cerrar el círculo. Para esto, considérese el problema general de programación no-lineal:

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{x \in X} f(x) \\ \text{s.a. } g(x) \leqslant 0 \\ \qquad h(x) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots (P)$$

y la condición de punto de silla:

$$\psi(\overline{x}, u, v) \leqslant \psi(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}) \leqslant \psi(x, \overline{u}, \overline{v}) \quad \ldots . (\text{PS})$$

donde $\psi(x, u, v) = f(x) + u^T g(x) + v^T h(x)$

Teorema 6.11 Sean f: $X \to \mathcal{R}$; g: $X \to E^m$; h: $X \to E^q$ funciones diferenciables, y $X \subset E^n$. Sea $S = \{x \mid g(x) \leqslant 0; h(x) = 0; x \in X\}$.

a) Supóngase que $\overline{x}$ cumple las condiciones de Kuhn y Tucker para el problema (P).
Supóngase además, que f, g_i son convexas en $\overline{x}$ para toda

$$i \in I(\overline{x}) \equiv \{i \mid g_i(\overline{x}) = 0\}$$

Supóngase finalmente que si $\overline{v}_i \neq 0$, entonces $h_i(x)$ es una función afín. Entonces, $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v})$ satisfacen la condición de punto de silla (PS).

b) Supóngase que $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v})$ con $x \in \overset{0}{X}$ y $\overline{u} \geqslant 0$ satisfacen las condiciones de punto de silla (PS). Entonces $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v})$ satisfacen las condiciones de Kuhn y Tucker.

Prueba:

a) Recuérdese que si $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v})$ satisfacen las condiciones de Khun y Tucker, se tiene que:

i) $\overline{x} \in S$
ii) $\overline{u}, \overline{v}$ son tales que

$$\begin{aligned} \nabla f(\overline{x}) + \nabla g(\overline{x})\overline{u} + \nabla h(\overline{x})\overline{v} &= 0 \\ \overline{u}^T g(\overline{x}) &= 0 \\ \overline{u} &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Entonces, por convexidad de f y $g_i; i \in I(\overline{x})$ en $\overline{x}$, y por afinidad de h_i cuando $\overline{v}_i \neq 0$, se obtiene que:

$$f(x) \geqslant f(\overline{x}) + \nabla f(\overline{x})^T (x - \overline{x})$$

$$g_i(x) \geqslant g_i(\overline{x}) + \nabla g_i(\overline{x})^T (x - \overline{x}) \quad \forall\, i \in I(\overline{x})$$

$$h_i(x) = h_i(\overline{x}) + \nabla h_i(\overline{x})^T (x - \overline{x}) \quad \forall\, i \ni \overline{v}_i \neq 0$$

para toda $x \in X$.

Entonces, multiplicando las relaciones por $\overline{u}_i$, y $\overline{v}_i$ según corresponda, y sumando, se obtiene:

$$\begin{aligned} \psi(x, \overline{u}, \overline{v}) = f(x) + \overline{u}^T g(x) + \overline{v}^T h(x) &\geqslant f(\overline{x}) + \overline{u}^T g(\overline{x}) + \overline{v}^T h(\overline{x}) \\ &\quad + [\nabla f(\overline{x}) + \nabla g(\overline{x})\overline{u} + \nabla h(\overline{x})\overline{v}]^T (x - \overline{x}) \\ &= f(\overline{x}) + \overline{u}^T g(\overline{x}) + \overline{v}^T h(\overline{x}) = \psi(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}) \end{aligned}$$

ya que $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v})$ satisfacen la condición ii) de Kuhn y Tucker. Así, $\psi(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}) \leqslant \psi(x, \overline{u}, \overline{v})$.

Además $g(\overline{x}) \leqslant 0$, $h(\overline{x}) = 0$ y $\overline{u}^T g(\overline{x}) = 0$ conduce a que $\psi(\overline{x}, u, v) \leqslant \psi(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v})$ para cualquier $u \geqslant 0$, completándose así la condición (PS).

b) Supóngase que $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v})$ con $x \in \overset{0}{X}$ y $\overline{u} \geqslant 0$ satisfacen (PS). Fácilmente se deduce que $\overline{x} \in S$ y que $\overline{u}^T g(\overline{x}) = 0$.
Ahora, como se satisface $\psi(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}) \leqslant \psi(x, \overline{u}, \overline{v})$ para cualquier $x \in X$, se tiene que $\overline{x}$ resuelve el problema

$$\min_{x \in X} \psi(x, \overline{u}, \overline{v})$$

Como $\overline{x} \in \overset{0}{X}$, esto sólo puede ser si

$$\nabla_x \psi(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v}) = 0$$

es decir, si

$$f(\overline{x}) + \nabla g(\overline{x})\overline{u} + \nabla h(\overline{x})\overline{v} = 0,$$

con lo cual se completa la prueba. ■

Dado que se ha obtenido equivalencia entre soluciones al dual y al problema de punto de silla, bajo condiciones de convexidad y afinidad muy semejantes, se ve que en estos casos el mismo punto $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{v})$ satisface cualquiera de las condiciones de optimalidad, dando así la relación deseada entre ellas.

Quizás sea interesante como ejercicio para el lector, el comprobar que el problema del ejemplo 6.1 tiene una solución que puede ser caracterizada por medio de un punto de silla del Lagrangeano y que (x^*, u^*) obtenido en el ejemplo es un punto de silla.

6.12 COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

En este capítulo se estudiaron condiciones de optimalidad a través de dualidad lagrangeana y de puntos de silla del Lagrangeano. Con esto se concluye esta breve introducción a la teoría de optimización y las principales formas que hay de enfocar el problema en un intento de que "todos los caminos lleguen a Roma". A fin de cuentas el objeto es buscar condiciones que indiquen la existencia de soluciones y formas de caracterizarlas. Como se ha visto, en realidad todos los enfoques están relacionados ya que los conceptos están siempre entrelazados.

Sin embargo, cabe hacer notar que de ninguna manera son los únicos enfoques intentados los que aquí se han presentado, aunque estos conceptos sean recurrentes y permeen toda la teoría de optimización. De particular interés podría resultar la teoría de dualidad que utiliza la noción de una "función conjugada". Esta corriente ha sido propuesta entre otros, por Fenchel y Rockafellar. Los resultados son muy elegantes pero dependen irremediablemente de propiedades de convexidad, que no es el caso del material aquí presentado, donde como se ha visto, se derivan varios resultados fuertes sin requisito alguno de convexidad. El lector interesado queda referido a.[1, 37, 40] En el ejercicio 6.20 al final del capítulo se toca ligeramente el tema.

Para una presentación moderna intuitiva del concepto de dualidad, el lector queda referido al artículo de Tind y Wolsey[44] y Ponstein,[37] quien presenta una buena visión de conjunto, además de rigurosa.

Hay también posibilidades de profundizar en las condiciones de punto de silla y en especial a su relación con el dual. El lector interesado queda referido a Ponstein[37] y a Flachs[11, 12] como un ejemplo de investigación un poco más reciente en el campo.

Finalmente, pudiera ser interesante conocer algunos usos de los multiplicadores de Lagrange, la teoría de dualidad y las condiciones de punto de silla. Un artículo interesante sobre estos temas es el de Ponstein.[36]

EJERCICIOS DEL CAPITULO 6

1. Para los ejercicios 5.2 a 5.6 haga lo siguiente:

   a) Escriba su dual lagrangeano y el dual diferenciable.
   b) Encuentre (x^*, u^*) que sean una solución del dual, bajo los casos relevantes de cada problema.
   c) Demuestre que (x^*, u^*) en cada caso, además de resolver el dual, también satisfacen las condiciones de Kuhn y Tucker y son puntos de silla del Lagrangeano correspondiente.

2. Sea $X \subset E^n$ un conjunto compacto no-vacío y sean $f\colon E^n \to \mathcal{R}$, y $\phi\colon E^n \to E^{m+q}$ funciones continuas. Demuestre que la función

$$\theta(u) = \inf_{x \in X} f(x) + u^T \phi(x)$$

   es una función cóncava sobre $u \in E^{m+p}$

3. Para las mismas condiciones del ejercicio 2, suponga que

$$\theta(\overline{u}) = f(\overline{x}) + \overline{u}^T \phi(\overline{x})$$

para $\bar{x} \in X$ y $\bar{x}$ es único. Sean $\{u^k\} \subset E^{m+p}$ y $\{x^k\} \subset X$ sucesiones tales que $u^k \to \bar{u}$ y $\theta(u^k) = f(x^k) + u^k \phi(x^k)$ para toda k. Demuestre que $x^k \to \bar{x}$.

Sugerencia: Proceda por reducción al absurdo suponiendo que existe una subsucesión $\{x^k\}_K$ tal que $||x^k - \bar{x}|| > \epsilon$ para $k \in K$. Como X es un conjunto compacto $\{x^k\}_K$ tiene alguna subsucesión convergente cuyo límite y es distinto de $\bar{x}$. Ahora demuestre que $\theta(\bar{u}) = f(y) + \bar{u}^T \phi(y)$ contradiciendo la unicidad de $\bar{x}$.

4. Bajo las mismas condiciones del ejercicio 2 y el supuesto de unicidad de $\bar{x}$, demuestre que $\theta(u)$ es diferenciable en $\bar{u}$, y que su gradiente es $\phi(\bar{x})$.

Sugerencia: Nótese que, por compacidad de X y continuidad de f y ϕ, para cualquier $u \in E^{m+p}$, siempre existe $x_u \in X$, tal que $\theta(u) = f(x_u) + u^T \phi(x_u)$. Por definición de θ deduzca que siempre se satisfacen las desigualdades siguientes:

$$\theta(u) - \theta(\bar{u}) \leqslant (u - \bar{u})\, \phi(\bar{x}) \qquad \ldots . (a)$$

$$\theta(\bar{u}) - \theta(u) \leqslant (\bar{u} - u)\, \phi(x_u) \qquad \ldots . (b)$$

De estas desigualdades y la desigualdad de Cauchy-Schwartz deduzca que

$$\theta(\bar{u}) - \theta(u) + (u - \bar{u})\, \phi(\bar{x}) \geqslant ||u - \bar{u}||\, ||\phi(x_u) - \phi(\bar{x})||$$

Aplique el resultado (b) para obtener que

$$\lim_{u \to \bar{u}} \frac{\theta(\bar{u}) - \theta(u) + (u - \bar{u})\, \phi(\bar{x})}{||u - \bar{u}||} = 0$$

5. Bajo las mismas condiciones del ejercicio 2, finalmente demuestre que aunque $\bar{x}$ no sea único, $\phi(\bar{x})$ siempre es un subgradiente de $\theta(u)$ en $\bar{u}$.
6. Considere el problema

$$\begin{aligned} &\text{mín } f(x) \\ &(x, y) \in Y \\ &\text{s.a. } g(x) + y = 0 \\ &\qquad h(x) = 0 \end{aligned}$$

Donde $f\colon E^n \to \mathcal{R}$; $g\colon E^n \to E^m$; $h\colon E^n \to E^q$ y

$$Y = \{(x, y) \mid x \in X;\ y \in E^m;\ y \geqslant 0\}$$

Escriba su dual y demuestre que es equivalente al dual del problema primal planteado en el texto:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in X} f(x) \\ &\text{s.a. } g(x) \leqslant 0 \\ &\quad h(x) = 0 \end{aligned}$$

7. Considere el problema primal mín $f(x)$ sujeto a $g(x) \leqslant 0; x \in X$. En los teoremas de dualidad conversa se requiere que f, g y X sean todos convexos. Reemplace las condiciones de convexidad sobre f y g por condiciones de diferenciabilidad y pseudoconvexidad para f, y cuasiconvexidad para g. ¿Sigue dándose la dualidad conversa? Demuéstrelo o dé un contraejemplo.
8. Demuestre que el dual lagrangeano del programa lineal, expresado en "forma canónica"

$$\left.\begin{aligned} &\text{mín } c^T x \\ &\text{s.a. } Ax \geqslant b \\ &\quad x \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (P)$$

es el conocido dual de programación lineal:

$$\left.\begin{aligned} &\text{máx } y^T b \\ &\text{s.a. } y^T A \leqslant c \\ &\quad y \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (D)$$

Comente sobre la afirmación "el dual del dual es el primal". ¿Sigue siendo cierta para el problema de programación no lineal? Demuéstrelo o dé un contraejemplo.

9. Con los resultados obtenidos en este capítulo, demuestre el teorema fundamental de Dualidad en programación lineal que dice que se cumple exactamente una de las afirmaciones siguientes:

   a) (P) y (D) tienen una solución factible y si x^* resuelve (P) e y^* resuelve (D), entonces $c^T x^* = b^T y^*$.
   b) Si uno de los problemas no tiene solución óptima finita (i.e. no está acotado), el otro no tiene solución factible.
   c) Ninguno de los dos problemas tiene solución factible.

10. Para el problema de programación lineal en "forma canónica":

$$\left.\begin{aligned} &\text{mín } c^T x \\ &\text{s.a. } Ax \geqslant b \\ &\quad x \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots . (P)$$

Demuestre que si $F = \{x \mid Ax \geqslant b;\ x \geqslant 0\} \neq \emptyset$ y existe $\alpha \in \mathfrak{R}$, tal que $c^T x \geqslant \alpha \ \forall\ x \in F$, entonces (P) tiene una solución óptima x^*.

Sugerencia: Nótese que si $F \neq \emptyset$ y no existe $x \in F$, tal que $c^T x < \alpha$, entonces existe "y" que es factible para el Dual (D).

11. Considere el problema de "Programación Cuadrática" siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \text{mín } q^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \\ \\ \text{s.a. } Ax \leqslant b \end{array}\right\} \quad \ldots . \text{(PQ)}$$

Demuestre que su dual lagrangeano viene dado por:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{(x,\,u)}{\text{máx}} \; -b^T u - \frac{1}{2} x^T Q x \\ \text{s.a. } Qx + A^T u + q = 0 \\ \qquad\qquad u \geqslant 0 \end{array}\right\} \quad \ldots . \text{(DQ)}$$

(Sugerencia: Nótese que $q^T x + x^T Q x + u^T A x = 0$)

12. En referencia al programa cuadrático (PQ) del problema anterior, sean:

$$F = \{x \mid Ax \leqslant b\}$$

$$D = \{(x, u) \mid Qx + A^T u + q = 0;\ u \geqslant 0\}$$

donde $Q \geqslant 0$.

a) Utilizando el teorema débil de dualidad, demuestre que:

si $\overline{x} \in F$, entonces

$$q^T \overline{x} + \tfrac{1}{2} \overline{x}^T Q \overline{x} \geqslant -b^T u - \tfrac{1}{2} x^T Q x \quad \forall\ (x, u) \in D.$$

b) Utilizando el teorema de dualidad conversa demuestre que:

Si (PQ) tiene una solución finita $x^* \in F$, entonces existe u^* tal que (x^*, u^*) resuelven (DQ) y

$$q^T x^* + \tfrac{1}{2} (x^*)^T Q x^* = -b^T u^* - \tfrac{1}{2} (x^*)^T Q x^*$$

13. Caracterice los casos de soluciones no-acotadas y de infactibilidad primal y/o dual para el problema de programación cuadrática. ¿Es posible obtener un teorema semejante al de programación lineal? (véase el problema 9).

14. Demuestre que si $Q > 0$ una forma alternativa para (DQ) es:

$$\begin{array}{l} \text{máx } u^T P u + u^T p - \frac{1}{2} q^T Q^{-1} q \\ \text{s.a. } u \geqslant 0 \end{array}$$

donde $P = -AQ^{-1}A^T$ y $p = -b - AQ^{-1}q$

(Sugerencia: Nótese que si $Q > 0$; Q^{-1} existe y $x = -Q^{-1}[A^T u + q]$).

15. Para el problema de programación no-lineal $\min_{x \in X} f(x)$; s.a. $g(x) \leqslant 0$, suponga que x^* es una solución óptima y que $(\overline{x}, \overline{u})$ es una solución del dual tal que $f(x^*) = f(\overline{x}) + \overline{u}^T g(\overline{x})$. Demuestre que $(x^*, \overline{u})$ también resuelve el dual.

16. Sea $f: E^n \times E^n \to \mathcal{R}$ la siguiente función:

$$f(x, y) = x^T y$$

a) Demuestre que f tiene un punto de silla tal que:

$$\min_{y \in E^n} \max_{x \in E^n} f(x, y) = \max_{x \in E^n} \min_{y \in E^n} f(x, y)$$

b) Para $f: \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ encuentre X, $Y \subset \mathcal{R}$ tales que

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y) > \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$$

17. Considere el problema:

$$\begin{aligned} &\max_{x \in \mathcal{R}} x^2 \\ &\text{s.a. } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{aligned}$$

Demuestre que el Lagrangeano correspondiente no tiene un punto de silla.

18. Para el problema de programación no-lineal $\min_{x \in X} f(x)$ sujeto a $g(x) \leqslant 0$, suponga que x^* es una solución óptima y que el lagrangeano tiene un punto de silla en x^* con multiplicadores $u^* \geqslant 0$. Demuestre que

$$(u^*)^T g(x^*) = 0.$$

19. Considere el problema general de programación no-lineal:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in X} f(x) \\ &\text{s.a. } g(x) \leqslant 0 \\ &\quad\; h(x) = 0 \end{aligned}$$

Donde $f: E^n \to \mathcal{R}$ y $g: E^n \to E^m$ son funciones convexas, y $h: E^n \to E^m$ es una función afín del tipo $h(x) = Ax - b$. Demuestre que si x^* resuelve el

problema, entonces existen $\bar{u}_0 \in \Re; \bar{u} \in E^m; \bar{v} \in E^p$ con $(u_0, \bar{u}) \geqslant 0$ y $(\bar{u}_0, \bar{u}, \bar{v}) \neq 0$, tales que

a) $\bar{u}^T g(x^*) = 0$.

b) El lagrangeano $\phi(x, u_0, u, v) = u_0 f(x) + u^T g(x) + v^T h(x)$ tiene un punto de silla tal que:

$$\phi(x^*, \bar{u}_0, u, v) \leqslant \phi(x^*, \bar{u}_0, \bar{u}, \bar{v}) \leqslant \phi(x, \bar{u}_0, \bar{u}, \bar{v})$$

20. Sean $X, Y \subset E^n$ conjuntos convexos no vacíos y f, g: $E^n \to \Re$. Defínanse las *funciones conjugadas* f_c, g_c de f y g, de la manera siguiente:

$$f_c(u) = \inf \{f(x) - u^T x \mid x \in X\}$$
$$g_c(u) = \sup \{g(x) - u^T x \mid x \in Y\}$$

a) Dé una interpretación geométrica de f_c y g_c.

b) Sean $X_c = \{u \mid f_c(u) > -\infty\}$ y $Y_c = \{u \mid g_c(u) < \infty\}$. Demuestre que f_c es cóncava sobre X_c, y que g_c es convexa sobre Y_c.

c) Demuestre el siguiente *teorema débil de Dualidad Conjugada:*

$$\inf \{f(x) - g(x) \mid x \in X \cap Y\} \geqslant \sup \{f_c(u) - g_c(u) \mid u \in X_c \cap Y_c\}$$

d) Ahora, suponga que f es una función convexa y g es una función cóncava, que $\overset{0}{X} \cap \overset{0}{Y} \neq \emptyset$, y que

$$\inf \{f(x) - g(x) \mid x \in X \cap Y\} > -\infty$$

Demuestre que la relación del inciso *c*) se cumple con igualdad estricta y que se puede obtener el sup $\{f_c(u) - g_c(u) \mid u \in X_c \cap Y_c\}$

Bibliografía

1. Avriel, M. "Non-linear Programming: Analysis and Methods" Ed. Prentice-Hall, 1976.
2. Bazaraa, M.S. y C.M. Shetty. "Non-linear Programming Theory and Algorithms" Ed. John Wiley, 1979.
3. Bazaraa, M.S. y J.J. Jarvis. "Programación Lineal y Flujo en Redes". Edit. Limusa, 1981 (Trad. del original en inglés).
4. Bonnesen, T. y W. Fenchel. "Theorie der Konvexen Körper". Springer-Verlag, 1934. Reedición: Chelsea, 1948.
5. Crouzeix, J.P. "A Second Order Condition for Quasi-Convexity". *Mathematical Programming,* Vol. 18, No. 3, 1980, Págs. 349-352.
6. Crouzeix, J.P. y J.A. Ferland. "Criteria for Quasi-Convexity and Pseudo-Convexity: Relationships and Comparisons". *Mathematical Programming,* Vol. 23, No. 2, 1982, Págs. 193-205.
7. Chew, K.L. y E.U. Choo. "Pseudo-Linearity and Efficiency". *Mathematical Programming,* Vol. 28, No. 2, 1984, Págs. 226-239.
8. Dantzig, G.B. "Linear Programming and Extensions", Princeton University Press, 1963.
9. Dorn, W.S. "Duality in Quadratic Programming". *Quart. of Applied Mathematics,* No. 18, Págs. 155-162, 1960.
10. Fenchel, W. "Convex Cones, Sets and Functions". Apuntes de Clase no-publicados. Princeton University, 1953.
11. Flachs, J. "Global Saddle-point Duality for Quasi-Concave Programs". *Mathematical Programming,* Vol. 20, 1981, Págs. 327-347.
12. Flachs, J. "Global Saddle-point Duality for Quasi-Concave Programs". *Mathematical Programming,* Vol. 24, 1982, No. 3, Págs. 326-345.
13. Hancock, H. "Theory of Maxima and Minima". Reedición 1960 por Dover Publications, del original de 1917.

14. Hanson, M.A. "A Duality Theorem in Non-linear Programming with Non-linear Constraints". *Australian Journal of Statistics,* No. 3, 1961, Págs. 64-72.
15. Hestenes. "Optimization Theory: The Finite Dimensional Case". Ed. John Wiley, 1975.
16. Horst, R. "On the Convexification of Non-linear Programming Problems: An Applications Oriented Survey" *European Journal of Operations Research,* Vol. 15, 1984, Págs. 302-392.
17. Huard, P. "Dual Programs". *IBM Journal of Research and Development,* No. 6, 1962, Págs. 137-139.
18. Intriligator, M.D. "Mathematical Optimization and Economic Theory". Prentice Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1971.
19. John, F. "Extremum Problems with Inequalities as Side Conditions". *Studies and Essays,* Courant Anniversary Volume, K.O. Friederichs, O. E. Neugebauer, y J.J. Stoker (Eds.), Wiley-Interscience, Nueva York, 1948.
20. Kantorovich, L.V. "Mathematical Methods in Organization and Planning of Production". *Management Science,* 6, 4, Págs. 366-422 (Trad. al inglés del original de 1939).
21. Kantorovich, L.V. "Mathematics in Economics: Achievements, Difficulties, Perspectives". Nobel Memorial Lecture, Dic. 11, 1975.
22. Karush, W. "Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Conditions". M.S. Thesis, Dept. of Mathematics, University of Chicago, 1939.
23. Katzner, D.W. "Static Demand Theory". Ed. McMillan, 1970.
24. Komlosi, S. "Some Properties of Nondifferentiable Pseudo-Convex Functions". *Mathematical Programming,* Vol. 26, No. 2, junio, 1983.
25. Koopmans, T.J. "Concepts of Optimality and their Uses". Nobel Memorial Lecture, Dic. 11, 1975.
26. Kuhn, H.W. y A.W. Tueker. "Non-linear Programming", Proceedings 2nd. Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. J. Neyman (Eds.) University of California Press, Bekeley Calif., 1951.
27. Lay, S.R. "Convex Sets and their Applications". Ed. John Wiley, 1982.
28. Luenberger, D.G. "Introduction to Linear and Non-linear Programming". Ed. Addison Wesley, 1973.
29. Luenberger, D.G. "Optimization by Vector Space Methods". Ed. John Wiley, 1969.
30. Mangasarian, O.L. "Duality in Non-linear Programming". *Quart. of Applied Mathematics,* No. 20, 1962, Págs. 300-302.
31. Mangasarian, O.L. "Non-linear Programming". Ed. McGraw-Hill, 1969.
32. Márquez Díez-Canedo, J. "On the Equivalence between the Safety-First and Min-Variance Criterion for Portfolio Selection". *European Journal of Operations Research,* Vol. 10, No. 2, 1982.

33. Martos, B. "Non-linear Programming: Theory and Methods" Ed. American Elsevier, 1975.
34. Minkowski, H. "Theorie der Konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächen begriffs". *Gesammelte Abhandlugen,* Leipzig-Berlín, 2, 1911, Págs. 131-229.
35. Murdoch, D.C. "Linear Algebra". Wiley & Sons Inc., Nueva York, 1970.
36. Ponstein, J. "Applying Some Modern Developments to Choosing your own Lagrange Multipliers". *SIAM Review,* Vol. 25, No. 2, 1983.
37. Ponstein, J. "Approaches to the Theory of Optimization" Cambridge University Press, 1980.
38. Rockafellar, R.T. "Marginal Values and Second-order Necessary Conditions for Optimality". *Mathematical Programming,* Vol. 26, No. 3, agosto, 1983.
39. Rockafellar, R.T. "Convex Analysis". Princeton University Press, 1970.
40. Rockafellar, R.T. "Conjugate Duality and Optimization". SIAM Filadelfia, 1974.
41. Rudin, Walter. "Principles of Mathematical Analysis". McGraw-Hill, Tokio, 1953.
42. Stewart, G.W. "Introduction to Matrix Computations". Academic Press, Nueva York, 1973.
43. Stöer, J. "Duality in Non-linear Programming and the Minimax Theorem". *Numerische Mathematik,* No. 5, 1963, Págs. 371-379.
44. Tind, J. y Wolsey. "An Elementary Survey of General Duality Theory in Mathematical Programming". *Mathematical Programming,* Vol. 21, 1981, Págs. 241-261.
45. Von Neumann, J. y O. Morgenstern. "Theory of Games and Economic Behavior". Princeton University Press, Princeton, N.J., 1947.
46. Wolfe, P. "A Duality Theorem for Non-linear Programming". *Quart. of Applied Mathematics,* No. 19, 1961, Págs. 239-244.
47. Zangwill, W.I. "Non-linear Programming: A unified Approach". Ed. Prentice-Hall, 1969.

Índice

A

Alternativas, teoremas de, 31, 39

B

Bola abierta, 21
Bonnesen, 31
Brecha de dualidad, 171

C

Carathéodory, teorema de, 35
Casco convexo, 33
Cerradura de un conjunto, 36
Cobertura abierta, 22
Combinaciones conexas, 33
Condición de regularidad, 30
Condiciones de primer orden, 127
Condiciones de segundo orden, 127
Condiciones geométricas, 131
Condiciones de Karush, Kuhn y Tucker, 136, 140
Condiciones de regularidad, 137
Condiciones de suficiencia, 146
Condiciones de optimalidad de punto de silla, 184
Conjuntos y subconjuntos, 17
  abierto, 21
  cerrado, 21
  compacto, 22
  convexo, 31, 33
  especificación de, 17
  fuertemente convexo, 21
  más pequeño, 22
  vacío, 21
Cono de direcciones factibles, 132
Cono tangente, 142
Convergencia, 23
Convexidad, 31
  cuasi-convexidad, 101, 104
  pseudo-convexidad, 101, 108
Cota
  máxima cota inferior o ínfimo, 28
  mínima cota superior o supremo, 28

D

Dantzig, G., 8
Derivada direccional, 72
Derivadas parciales, 26, 27
Desigualdad de Cauchy-Schwarz, 20
Desigualdad del triángulo, 21, 40, 41
Desigualdad de la media geométrica-aritmética, 131
Diferenciabilidad, 24, 108
Dirección de descenso, 126
Dirección factible, 180
Distancia, 21
Dualidad, 10, 157
  conversa, 171
  conjugada, 189
  el resultado débil, 169
  el resultado fuerte, 180
  problema dual lagrangeano, 164
  relaciones de, 58

E

Espacio euclideano E^n, 17
Epígrafo, 67

F

Farkas, 47, 49, 51, 52, 53
Fenchel, 31

Fritz-John, 8, 31
  condiciones de, 134, 135
Frontera de un conjunto, 36
Función
  afín, 113
  cóncava, 64, 66 (definición)
  conjugada, 181
  convexa, 64, 66 (definición)
  cuasi-convexa (cóncava), 101
  cuasi-monotónica, 120
  de soporte, 114
  diferenciable, 24, 26 (definición),
  diferenciables, 24, 26
  doblemente diferenciable, 80 (definición)
  dual, 157, 160
  estrictamente convexa (cóncava), 77, 79
  estrictamente cuasi-convexa, 104
  estrictamente pseudo-convexa, 113
  fraccionaria lineal, 120
  fuertemente convexa, 113
  fuertemente cuasi-convexa, 106
  implícita, teorema de la función, 29, 114, 172
  objetivo, 172
  positiva sub-definida, 129
  positivamente homogénea, 96
  primal, 165
  pseudo-lineal, 128
  pseudo-convexa (cóncava), 112

G

Gale, 53
Gordan, 55
  teorema de, 56, 57
Gradiente, 26
Gráfica de una función, 67

H

Haddamard, 63
Hessiana, matriz, 108
Hiper-esferas, 54
Hipógrafo, 67
Hiperplano, 42, 43
  de separación, 42, 43, 54
  de soporte, 42, 54
  "separa bien", 42, 54
  "separa estrictamente", 42, 54
  "separa fuertemente", 43, 54
  soporta "bien", 54
Hölder, 63
Holgura complementaria, 140

I

Inexistencia, 185
Interior de un conjunto, 36
Intervalos, abiertos, cerrados, 18

J

Jensen, 64

K

Kantorovich, 8
Karush, 8
Koopmans, 8
Kuhn y Tucker, teorema de, 39

L

Lagrange, 125, 128
Lagrangeano, 125, 126
Lay, 31, 57
Ley del paralelogramo, 20, 40, 41
Límite, 22, 27

M

Matríz, 4
  hessiana, 108
  jacobina, 27, 30, 130
  positiva/negativa definida y semi-definida, 81
  rango de, 31
  transpuesta, 18
Mínimo local y global, 82, 127
Minkowski, 31
Motzkin, 47
  teorema de transposición, 51
Multiplicadores de Lagrange, 133

N

No-acotamiento, 181
Norma de un vector, 21
Números enteros, 18
Números reales, 17

O

Optimalidad
  condiciones geométricas de, 131, 158
  existencia, 171
  local y global, 82, 127
  relación entre condiciones, 188
Optimización
  irrestricta, 126
  lagrangeana, 125
  matemática, 39
  teoría de, 39, 51

P

Poliedro, 28

Problema
de punto de silla de K-T, 184
de punto de silla de F-J, 185
de programación no-lineal, 185
dual lagrangeano, 158
dual diferenciable, 158
general de programación no-lineal, 157
primal, 168
Producto interno, externo de dos vectores, 19
Programación
cuadrática, 168
lineal, 10, 52
no-lineal, 51, 140
Punto
de silla, 184
extremo, 57, 89
factible, 131
interior, 36
máximos y mínimos, 82
máximos y mínimos de funciones convexas, 82, 87, 88
regular, 30, 129

R

Región factible, 129
Requisito restriccional, 138
de Abadie, 157
de independencia lineal, 138
de Kuhn y Tucker, 138
de Zangwill, 138
Restricciones
activas, 136, 142
igualdades, 128
desigualdades, 130
pasivas, 136, 142
Rockaffellar, 31

S

Segundas derivadas parciales, 72
Separación de conjuntos, 39, 57
Simplex, 35
método, 36
Soluciones factibles, 82
Soporte
de conjuntos convexos, 54
hiperplanos de, 42, 54
Subgradiente, 73, 74
Sucesiones y sub-sucesiones, 22
acotadas, 23
propiedad de Cauchy, 23, 40

T

Taylor, expansión o teorema de, 28

V

Valor medio, teorema del, 27
Vecindad, 21
Vector, fila, columna, transpuesto, 19
suma, resta, multiplicación, 19
producto, interno y externo, 19
vector unitario, 20
vector suma, 20
colineales, 41
normal, 42

—o0o—

ESTA OBRA SE TERMINO DE IMPRIMIR EL DIA 23 DE FEBRERO DE 1987
EN LOS TALLERES DE IMPRESIONES EDITORIALES, S. A.
LAGO CHALCO 230, COL. ANAHUAC
MEXICO, D. F.

LA EDICION CONSTA DE 3,000 EJEMPLARES
Y SOBRANTES PARA REPOSICION

529

Acerca del autor:

JAVIER MARQUEZ DIEZ-CANEDO obtuvo en 1974 el Doctorado en Ciencias Matemáticas con especialidad en Programación Matemática y Economía en la Johns Hopkins University. En 1967 se graduó en la London School of Economics and Political Science en el Programa de Maestría en Investigación de Operaciones. En 1965 tomó el curso de diploma en Análisis Numérico y Computación en el Institute of Computer Science de la Universidad de Londres. Se graduó en 1965 como Ingeniero Mecánico Administrador en el Instituto Tecnológico de Monterrey. Ha ocupado importantes cargos en la Banca y ha sido profesor en la Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto Tecnológico Autónomo de México y El Colegio de México. Además, es miembro de número de la Academia Mexicana de Ingeniería. Cuenta con amplia experiencia en la aplicación de técnicas cuantitativas y modelos matemáticos a problemas decisionales en el ramo bancario.

Es autor de múltiples publicaciones en revistas especializadas y de la obra *Carteras de Inversión: Fundamentos Teóricos y Modelos de Selección Optima,* publicada también por Editorial Limusa. Actualmente es Subdirector a cargo de proyectos especiales para el Area de Dirección de BANCOMER, S. N. C.

Este libro proporciona una excelente y actualizada introducción a la Teoría de Optimización Matemática. Aunque el tema se trata dentro de un marco matemático formal, se ha buscado complementar la exposición con ejemplos y explicaciones intuitivas de los resultados y conceptos más importantes, sin sacrificar rigor científico.

En los primeros capítulos se estudian los conceptos de análisis convexo más relevantes a la teoría de optimización, es decir, aquellas propiedades de convexidad de conjuntos y funciones que son relevantes a la caracterización de puntos óptimos. Se deducen los resultados básicos de optimización irrestricta, así como un resultado geométrico general. En los últimos capítulos se presentan los temas clásicos de optimización, derivando las condiciones de tipo lagrangeano más importantes y generales, para concluir con teoría de dualidad y optimalidad de puntos de silla.

El libro es de interés en la mayoría de las disciplinas ingenieriles y en la actualidad para la teoría económica moderna. Obviamente, el tema tiene interés matemático intrínseco y en gran parte de disciplinas afines en matemáticas aplicadas, como análisis numérico, investigación de operaciones, computación, teoría de juegos, etc., y las técnicas más avanzadas de gestión científica y administración.

ISBN 968-18-1991-8